ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK UND MATHEMATIK.

I.

Notiz über den rhomboëdrischen Wismuthglanz;

von

W. Haidinger.

Neuere bergmännische Arbeiten in der an mineralogischen Schätzen so reichen Umgegend von Schemnitz haben kürzlich bestimmbare Varietäten einer metallischen Species geliefert, die früher von den Mineralogen theils übersehen, theils unvollständig beschrieben worden war.

Es ist dieſs das von Herrn Bergrath *Wehrle* unter der Benennung des prismatischen Wismuthglanzes in *Schweigger's* Journal *) aufgeführte Tellur-Wismuth. Ich war so glücklich, auf meiner letzten Reise nach Steiermark im vorigen Herbste, vom Herrn Professor *Anker* einige deutliche Krystalle zu bekommen, an denen ich jedoch sogleich erkannte, daſs ihre Formen in das rhomboëdrische System gehören. Die systematische Benennung ändert sich hierdurch in die des *rhomboëdrischen Wismuthglanzes.*

Als Grundgestalt der Krystallreihe glaube ich ein Rhomboëder von 81° 2′ (Fig. 3) annehmen zu müssen, obwohl sich die demselben entsprechenden Flächen noch

*) 1830, Nro. 8, S. 482.

nicht an den beobachteten Krystallen gefunden haben. Seine Axe ist $=\sqrt{7.56}$.

Die Krystalle zeigen gewöhnlich die Formen von Combinationen der zwei Rhomboëder $R+1$ (f), dessen Axenkante 66° 40′ (Fig. 4), und $R+2$ (m), dessen Axenkante 63° 10′ (Fig. 5) beträgt, mit der Fläche o, welche die Grenze der Reihe der Rhomboëder ist, und senkrecht auf deren Axe steht, Die in Fig. 6 abgebildeten Krystalle sind oft sehr kurz in der Richtung der Axe, und da die Rhomboëderflächen übrigens auch eine starke horizontale Streifung haben, und die Flächen f nur unter 105° 15′, die m aber gar nur unter 97° 46′ gegen o geneigt sind, so ähneln sie regelmäſsigen sechsseitigen Prismen. Manchmal sind sie auch platt gedrückt, und dieses Verhältniſs insbesondere hat Veranlassung gegeben, daſs man sie für Formen des prismatischen Systems gehalten hat. Diese Krystalle, vorzüglich aber die Fig. 5, kommen gar selten einzeln vor, sondern sie sind regelmäſsig mit andern, von gleicher Form, verbunden, wie dieſs Fig. 6 dargestellt ist. An jeder Fläche des Rhomboëders f in einem Individuo liegt eine Fläche f eines andern, und zwar so, daſs die Kante des Grundrhomboëders in je zwei Krystallen gleiche Lage hat. Die Zusammensetzungsfläche steht also senkrecht auf der Axenkante von R. Es ist genau dasselbe Verhältniſs, wie unter andern am Rothgiltigerze *), wo sich auch die Zusammensetzung an allen drei Axenkanten von R zugleich zeigt. Auf dieses, bei der gegenwärtigen Species sehr gewöhnliche Vorkommen hinweisend, schlage ich für dieselbe den Trivialnamen *Tetradymit* vor, von *τετράδιμος*, vierfach.

Die Neigung von o gegen o′, oder gegen o″ des

*) *Mohs's* Grundriſs, Fig. 134.

andern Individuums ist $= 95^{0}$. Aus diesem Winkel, der jedoch auch nur annähernd hat bestimmt werden können, sind die übrigen Winkel und Abmessungen berechnet.

Zugleich mit der Form erkannte ich aber auch den Habitus eben derjenigen Species, welche in *Mohs's* Grundriſs *) als eine von jenen Arten beschrieben ist, welchen man in Ungarn gemeiniglich den Namen *Molybdänsilber* beilegt. Auch die übrigen Eigenschaften der nun entdeckten Varietäten stimmen gut mit den von *Mohs* erwähnten überein. Dergleichen sind: die sehr vollkommene Theilbarkeit senkrecht auf die Axe; die Biegsamkeit der Blättchen, welche man durch dieselbe erhält; die Farbe — zwischen zinnweiſs und stahlgrau —; die Härte von 1.5 in *Mohs*, ich fand mit Hrn. *Partsch* für die neuen Varietäten 2.0. Dieser Unterschied dürfte jedoch daher rühren, daſs die frühern Versuche mit reinen eingewachsenen Massen, die spätern aber mit Krystallen angestellt wurden, die auf der Oberfläche mit einer härtern Haut überzogen sind, von der man sie nur schwer reinigen kann. *Mohs* gibt das eigenthümliche Gewicht zu 7.408 an; damit stimmt *Wehrle's* Angabe von 7.807 freilich nicht, wohl aber das Resultat, welches Hr. Professor *Baumgartner* erhielt, nämlich 7.514.

Auch das chemische Verhalten stimmt überein. *Mohs* gibt nämlich »vor dem Löthrohre die Reaction von »Schwefel, Tellur und Wismuth« an, Stoffe, die auch Hr. Bergrath *Wehrle*, und zwar in folgenden Zahlenverhältnissen gefunden hat:

Wismuth . . .	60.0,
Tellur	34.6,
Schwefel . . .	4.8.

---

*) Theil 2, S. 662.

Die neuen Varietäten des Tetradymits sind zu Schoubkau bei Schernowitz, unweit Schemnitz, gefunden worden, und zwar durch Regen aus einer Lettenkluft in Trachytkonglomerat ausgewaschen, auf welche seitdem ein Versuchbau unternommen worden ist. Die Krystalle in mannigfaltigen Gruppirungen sind in diesen Letten eingewachsen. Der Fundort der von *Mohs* beschriebenen Varietät des Tetradymits ist gegenwärtig unbekannt, doch wird die aufmerksame Untersuchung irgend einer alten Sammlung gewiſs denselben in Ungarn oder Siebenbürgen bestimmen. Der Tetradymit ist dort in graulichweiſsem Quarz eingewachsen, und von gediegenem Gold und Kupferkies begleitet.

Zusatz *). Der Tetradymit oder rhomboëdrische Wismuthglanz findet sich mit gediegenemGolde und goldhältigem Schwefelkies (dem sogenannten Schwitzgolde) in hornsteinartigen Quarz eingesprengt auf der Gregorii Nazianzeni - Grube im Gebirge Feritsel, unweit Pojana, im siebenbürgischen Golddistricte, wahrscheinlich in Grünstein - Porphyr, und wurde bisher mit dem gediegenen Tellur verwechselt. — Zum Tetradymit wird wohl auch das von *Born* (*Catalogue de la Coll. de Mlle de Raab, T. II., p.* 453) und *Estner* (Mineralogie, III. Bd., S. 243) erwähnte Wasserblei gehören, welches zu Kakova bei Rhimaszombath im Gömorer Comitate mit gediegen Gold auf graulichem Quarz in Chloritschiefer eingebrochen hat, und als groſse Seltenheit nur in sehr wenig Sammlungen anzutreffen ist.

---

*) Vom *P. Partsch.*

II.
Naturhistorische und chemische Untersuchung des prismatoidischen Wismuthglanzes *);

vom

Bergrath und Prof. *Wehrle* in Schemnitz.

Dieses Mineral wurde vor beiläufig sechs Monaten in den k. Probiergaaden zu Schemnitz zur Untersuchung auf Blei und Silber eingesendet, weil man es für Bleiglanz hielt, und zugleich einen Silbergehalt desselben hoffte.

Die gewöhnliche Probe mit schwarzem Fluſs gab indessen statt Blei ein sprödes Metallkorn, welches dem Wismuth ähnlich war, aber eine weiſsere Farbe und einen körnigen Bruch zeigte; mit Blei angesotten, und dieses abgetrieben, lieferte dasselbe kein Silber.

Mein Freund und ehemaliger Schüler, jetzt königl. Probiers-Adjunct, Herr *Karl Kowarz*, dem das Vorkommen des Wismuths in dieser Gegend und dessen abweichendes Verhalten auffiel, hatte die Gefälligkeit, mich auf dieses neue Mineral aufmerksam zu machen, und veranlaſste dadurch die Auffindung des Tellurs in demselben; denn als dieses Mineral vor dem Löthrohre untersucht wurde, verrieth die Färbung der Flamme alsogleich das Daseyn vom Tellur, welches eine genauere Untersuchung später bestätigte.

Daſs es in einer Lettenkluft der Grünstein-Formation zu Schoubkau nächst Schernowitz vorkomme, habe

---

*) Dem vorhergehenden Aufsatze gemäſs *rhomboëdrischer Wismuthglanz*, oder, nach der trivialen Benennung, *Tetradymit*. *(B.)*

ich bei der Anzeige dieses Minerals im Jahrbuche der Chemie und Physik von *Schweigger Seidel* 1830, achten Hefte, pag. 482 bereits angeführt, aber meine Hoffnung, daſs es daselbst in gröſserer Menge vorkommen, und eine reiche Quelle des noch immer seltenen Tellurs werden würde, hat sich leider nicht bestätigt, indem es nun ganz verschwunden ist. Die abgeriebenen Stücke und Gerölle, welche in diesen Letten zu finden sind, dürften wohl hinlänglich beweisen, daſs diese Lagerstätte eine secundäre sey, und berechtigen zu der Hoffnung, daſs man es in der Umgebung nochmals finden werde,

Zuerst fand man es in Körnerform und in undeutlichen krystallinischen, mit weiſsem Letten gemengten Massen, unter welchen sich vorzüglich vierseitige prismatische Gestalten auszeichneten, welche auch die Ansicht begründeten, daſs dieses Mineral in prismatischen Formen krystallisire.

Später fanden sich zwar ausgezeichnetere Individnen, wie aus Fig. 7 bis 13 ersichtlich ist, welche aber die in der Anzeige gemachte Beschreibung dieses Minerals nicht ganz bestätigen.

Fig. 7, 12 und 13 stellt die Krystalle in natürlicher Gröſse, Fig. 8, 9, 10 und 11 aber in doppelter Gröſse dar. Fig. 7, 12 und 13 lassen sich als Combinationen des prismatischen Systems betrachten, und zwar Fig. 7, *a* und *b*, als zusammengesetzte Gestalt, deren Individuen aus $P + \infty$ und $\breve{P} + \infty$ bestehen, Fig. 12 und 13 aber als Combinationen von $P + \infty$ und $P - \infty$, oder bei Annahme einer andern Hauptaxe als $\bar{P}r$ mit $\breve{P}r + \infty$. Da die Theilbarkeit bei Fig. 7 wie bei Fig. 12 parallel der Fläche *c* Statt findet, so erscheint dieselbe prismatoidisch, wenn die Fläche *c* (Fig. 12 und 13) nicht $P - \infty$, sondern $\breve{P}r\ \infty$ angehört.

Betrachtet man dagegen die Gestalten Fig. 8, 9, 10

und 11, deren Winkeln einander sämmtlich gleich und 120° sind, so wird es sehr wahrscheinlich, daſs diese Gestalten dem rhomboëdrischen Systeme zugehören, und eigentlich Combinationen von $R-\infty$ mit $R+\infty$ sind, daher die Gestalten Fig. 7, 12 und 13 eigentlich als unvollkommene und durch unverhältniſsmäſsige Vergröſserung zweier paralleler Flächen gebildete Formen betrachtet werden müssen.

Ist diese Ansicht richtig, so gehören diese höchst unvollkommenen Gestalten dieses Minerals nicht in das prismatische, sondern in das rhomboëdrische System, und in so fern muſs die gemachte, die krystallographischen Verhältnisse dieses Minerals betreffende, Angabe berichtigt werden.

Der Charakter der Combinationen ist dirhomboedrisch, wie zum Theil aus Fig. 10 ersichtlich ist.

Die gewöhnlichen Combinat. sind $R-\infty . R+\infty$ und $R-\infty . R+n$.

Die Theilbarkeit ist ausgezeichnet axotom.

Der Bruch ist nicht wahrnehmbar, die Bruchfläche zart gestreift.

Die Farbe ist licht bleigrau, auf frischen Theilungsflächen stark ins Zinnweiſse ziehend, oft eisenschwarz angelaufen.

Der Glanz, vorzüglich auf den Theilungsflächen, stark und metallisch.

In dünnen Blättchen gemein biegsam.

Härte = 2.2, Gewicht = 7.500. Die pyramidalen Gestalten gaben in der Regel nur ein sp. Gew. = 7.200. Die Ursache liegt in den hohlen Räumen, welche sie einschlieſsen, von welchen man sich bald überzeugen kann, wenn man dieselben parallel ihren Theilungsflächen theilt. Diese Räume bilden oft ein deutliches *u*. Jedes Stück, dessen spec. Gew. man bestimmen will,

mufs daher getheilt und auf den Theilungsflächen sorgfältig untersucht werden. Die Bestimmung des spec. Gewichtes fand bei 14° *R.* Statt.

Erhitzt man dieses Mineral in einer geschlossenen Glasröhre, so verflüchtiget sich etwas Tellur in Gestalt eines weifsen Dampfes, und in der Nähe der erhitzten Stelle condensiren sich kleine, metallisch glänzende Tropfen.

Vor dem Löthrohre, auf Kohle erhitzt, schmilzt es leicht, und verbreitet einen deutlichen Schwefel- und Selengeruch; zugleich entwickeln sich weifse Dämpfe, welche die Kohle nächst dem Korne gelb, von diesem entfernt aber weifs beschlagen.

Die Löthrohrflamme wird blau gefärbt, und man erhält ein glänzendes Metallkorn, welches sich beim Erkalten mit einer röthlichen Haut überzieht, übrigens spröde, im Bruche silberweifs und körnig ist.

Salpetersäure löset das Mineral leicht und mit Rücklassung gelber Flocken, welche sich als Schwefel erweisen, auf, nur unreine Stücke hinterlassen zugleich etwas Kieselerde.

Versetzt man die Auflösung mit schwefeligsaurem Ammoniak, so setzt sich in Kurzem ein schwarzer Niederschlag ab; versetzt man dieselbe zuerst mit reinem, und dann mit schwefelwasserstoffsaurem Schwefelammoniak, so bildet sich ein schwarzer Niederschlag; scheidet man diesen durch das Filtrum ab, und versetzt die Flüssigkeit mit Salzsäure, so setzt sich abermals ein schwarzer Niederschlag ab, der im schwefelwasserstoffsauren Ammoniak löslich ist.

Aus diesem Verhalten geht deutlich hervor, dafs dieses Mineral aus Schwefel, Tellur und Wismuth, nebst Spuren von Selen besteht.

Quantitative Untersuchung.

40 Gran dieses Minerals wurden in reiner Salpetersäure gelöst; die Auflösung erfolgte leicht und mit Entwickelung von Salpetergas; als dieselbe abfiltrirt wurde, blieb auf dem Filtrum, nebst einer Schwefelkugel, noch ein weisses Pulver zurück: erstere verflüchtigte sich auf einem Platinlöffelchen vollständig, sie wog 0.75 Gran; das weisse Pulver blieb, geglüht, unverändert zurück, und wog 0.160 Gr.; mit Kali in einem silbernen Tiegel geschmolzen, löste es sich vollständig auf, und wurde diese Kaliverbindung durch Salzsäure im Übermaſs versetzt, zur Trockne abgedampft, und neuerdings in mit Salzsäure säuerlich gemachtem Wasser aufgelöst, so blieb 0.150 eines weiſsen Pulvers zurück, welches demnach als Kieselerde betrachtet werden muſs.

Die saure, vom Schwefel und der Kieselerde getrennte Auflösung wurde mit verdünnter Salpetersäure, und dann mit saurer salpetersaurer Barytlösung versetzt, der erhaltene weiſse Niederschlag Tags darauf auf dem Filtrum gesammelt, und zuerst mit Salpetersäurehältigem Wasser, dann mit reinem Wasser wohl ausgesüſst, getrocknet und geglüht; er betrug 6.916 Gr., welche 1.21 Schwefel entsprechen, und in Verbindung mit obiger 0.75 Gr. wiegender Schwefelkugel 1.96 Gr. ausmacht.

Nun wurde die Flüssigkeit, um den überschüssigen Baryt zu fällen, mit verdünnter Schwefelsäure, dann mit reinem, und endlich mit schwefelwasserstoffsaurem Schwefelammoniak im Übermaſs versetzt, und mit demselben 24 Stunden in Digestion erhalten.

Nach dieser Zeit wurde das gebildete Wismuth-Sulfurid auf dem Filtrum gesammelt, mit einem schwefelwasserstoffsauren Schwefelammoniak haltenden Wasser wohl ausgewaschen, und bis zur vollständigen Zerlegung mit Salpetersäure erhitzt, nach erfolgter Abschei-

dung des Schwefels aber mit kohlensaurem Ammoniak bei einer Temperatur von 80° *R.* gefällt, und das ausgeschiedene Wismuthoxyd erst nach zwölf Stunden abfiltrirt.

Nachdem dieses getrocknet und im Platintiegel ausgeglüht wurde, betrug das Gewicht desselben 26.46 Gr., welches 23.79 Wismuthmetall entspricht.

Die schwefelwasserstoffsaure Schwefelammoniakhältige, von dem Wismuth-Sulfurid getrennte Flüssigkeit wurde, bis sie etwas sauer reagirte, mit Chlorwasserstoffsäure versetzt, das ausgeschiedene Tellur-Sulfurid gesammelt, gewaschen, und mit concentrirter Chlorwasserstoffsäure zerlegt; die tellurhältige Flüssigkeit mit schwefeligsaurem Ammoniak versetzt, die freie Säure aber vorsichtig mit reinem Ammoniak neutralisirt, weil sonst immer etwas Tellur in der Auflösung blieb.

Das gefällte Tellur gesammelt, getrocknet, und endlich bis zum beginnenden Schmelzen erhitzt, wog 13.89 Gr. 40 Gran dieses Minerals lieferten demnach

Wismuth . . .	23.790,
Tellur	13.890,
Schwefel . . .	1.960,
Kieselerde . . .	0.160,
	39,800,

also enthalten 100 Theile desselben

Wismuth	59.47,
Tellur	34.72,
Schwefel	4.90,
Siliciumoxyd . .	0.40,
	99.49.

Da aber das Siliciumoxyd offenbar mechanisch beigemengt ist, so gibt die Rechnung für 100 Theile dieses Minerals eigentlich:

Wismuth	. . . .	59.84,
Tellur	. . . . .	35.24,
Schwefel	. . . . .	4.92,

letzterem schon die Spur von Selen zugerechnet, dessen Menge nicht bestimmbar ist.

Diese Zusammensetzung entspricht aber sehr nahe der Formel $BiS + BiTe^2$, und es dürfte daher dieses Mineral in chemischer Hinsicht am nächsten den Arsenik-Schwefelmetallen stehen, welche ebenfalls aus zwei negativen und einem positiven Metalle zusammengesetzt sind.

In naturhistorischer Hinsicht gehört es offenbar unter die Glanze; schwieriger wird es zu entscheiden, in welches Geschlecht dieser Ordnung es gerechnet werden solle.

Nimmt man bloſs auf die naturhistorischen Eigenschaften dieses Minerals Rücksicht, so gehört es zu Folge der Farbe, der Härte und der Schwere am nächsten zum Bleiglanz.

Daſs der hexaëdrische Bleiglanz, als die einzige Species, welche man bis jetzt kennt, in tessularen Formen krystallisirt, kann die Ausschlieſsung einer andern ihm sehr verwandten Species nicht bedingen, denn es kann auſser dem hexaëdrischen Bleiglanze auch ein rhomboëdrischer oder prismatischer Bleiglanz existiren, so wie es nebst dem tetraëdrischen Kupferglanze auch einen prismatischen und einen prismatoidischeu gibt, das ist, Krystallisation allein kann irgend ein Mineral nicht von einer Ordnung noch von einem Geschlechte ausschlieſsen, wenn dieſs nicht durch andere Merkmale geschieht.

In das Geschlecht Tellurglanz kann es, ohne die Charakteristik desselben zu erweitern, nicht gestellt werden, da es Farbe, Härte und Schwere ausschlieſsen;

gleiche Gründe gestatten nicht dessen Vereinigung mit dem Molybdänglanze.

Von dem Geschlechte Wismuthglanz wird das beschriebene Mineral durch das grofse spec. Gewicht ausgeschlossen, selbst dann, wenn die Grenzen im Charakter des Wismuthglanzes erweitert werden, weil das spec. Gewicht des Wismuthglanzes von Rezbanya nur 6.549 beträgt, und diese Erweiterung, welche Herr Prof. *Mohs* pag. 579 empfiehlt, daher nicht hinreichen würde, das beschriebene Mineral einzuschliefsen, dessen spec. Gewicht, nach mehrmaligen wiederholten Untersuchungen, 7.500 beträgt; würde man aber die Grenzen im Charakter des Wismuthglanzes so weit erweitern, so würde die Charakteristik des Blei- und des Wismuthglanzes gar keine Verschiedenheit darbieten. Das grofse spec. Gewicht dieses Körpers gestattet nicht dessen Einordnung zum Antimonglanz-Geschlechte, und eben diese Eigenschaft, so wie auch die Farbe, schliessen es von dem Melanglanz-, Kupferglanz- und dem Silberglanz-Geschlechte vollständig aus.

Es bleibt daher nichts anders übrig, als dieses Mineral, weil es, obwohl in seinen naturhistorischen Eigenschaften sehr ausgezeichnet, nicht in die aufgestellten Geschlechter der Ordnung Glanze pafst, entweder in den Anhang zu dem sogenannten Molybdänsilber zu verweisen, von welchem es sich aber, wie in der Folge gezeigt wird, wesentlich unterscheidet, oder es, ohne Rücksicht auf dessen Bestandtheile, welche die naturhistorische Methode ohnehin nicht beachtet, dem verwandtesten Geschlechte, das ist, dem Bleiglanze zu unterordnen, oder endlich es, sammt dem sogenannten Molybdänsilber, einem neuen Geschlechte zuzuweisen.

Sowohl das erste als das letzte scheint aber nicht rathsam, denn es ist kein Grund vorhanden, ein ausge-

zeichnetes, in allen seinen naturhistorischen Eigenschaften bekanntes Mineral im Anhange aufzuführen, und eine Vermehrung der Geschlechter dürfte nur dann nöthig seyn, wenn ausgezeichnete naturhistorische Eigenschaften solche gebieten.

In Anbetracht des Umstandes, daſs durch die Erweiterung der Grenzen im Charakter des Wismuthglanzes dieser selbst zerstört würde, dürfte die Aufnahme dieses Fossils in das Geschlecht des Bleiglanzes, unter dem Namen: »rhomboëdrischer Bleiglanz,« den Vorzug verdienen, welches zu entscheiden der Verfasser übrigens gerne geübtern Krystallographen und Systematologen überläſst.

Die gröſste naturhistorische Ähnlichkeit besitzt dieses Mineral mit jenem, welches Herr Prof. *Mohs* im zweiten Bande seines Grundrisses, pag. 662, im Anhange zum Molybdänsilber beschreibt, dessen Fundort aber nicht näher angezeigt ist; es unterscheidet sich von demselben nur durch gröſsere Härte. Da dem Verfasser weder der Ort, wo dieses Mineral vorgekommen, bekannt ist, noch demselben etwas davon zu Gebote steht, so konnte es auch mit demselben nicht verglichen werden.

In chemischer Hinsicht ist es mit dem prismatischen Wismuthglanz von Rezbanya ganz gleich; denn als dieses Mineral, welches in Beziehung auf Farbe, Glanz, Härte und Vorkommen auffallend mit dem beschriebenen übereinstimmt, untersucht wurde, zeigte sich alsogleich, daſs es auch dieselben qualitativen sowohl als auch quantitativen Bestandtheile enthalte, und daſs es in dieser Beziehung ganz von dem Wismuthglanze von Riddarhyttan in Westmanland abweiche, welches nach Herrn *Heinrich Rose* aus 80.98 Th. Wismuth und 18.72 Schwefel, oder nach der Formel $Bi S^2$ zusammengesetzt ist.

Die Untersuchung wurde ganz nach der oben beschriebenen Weise geleitet, daher dieselbe hier nicht wiederholt wird. Der aufgefundene Unterschied bestand nur in der gröſseren Siliciumoxydmenge, welche in den reinsten Stücken des Rezbanyaer Wismuthglanzes immer 8 pCt. überstieg, und bis 18 pCt. wechselte.

Die abweichende Menge des Siliciumoxydes, die Körnerform, in welcher es zurückbleibt, wenn gröſsere Stücke des Wismuthglanzes der Einwirkung der Säuren ausgesetzt wurden, lassen keinen Zweifel übrig, daſs auch hier dasselbe mechanisch beigemengt ist; nimmt man aber das achtfache spec. Gewicht des Minerals von Schoubkau, und addirt demselben das spec. Gewicht des rhomboëdrischen Quarzes zu, so erhält man nach erfolgter Division durch 9 ziemlich nahe das spec. Gew. des Rezbanyaer Wismuthglanzes, welches sich demnach als ein inniges Gemenge des Minerals von Schoubkau mit dem rhomboëdrischen Quarze betrachten läſst.

Herr Professor *v. Mohs* stellt aber das Wismuthglanz von Rezbanya ins prismatische System; dem Verfasser sind keine regelmäſsigen Gestalten dieses Minerals zugekommen, um solche mit den vorliegenden, im ersten Augenblicke sich auch als prismatisch dargebotenen, genau vergleichen zu können. Sollte die Verschiedenheit dieser zwei sich naturhistorisch sehr nahe verwandten Mineralien wirklich erwiesen werden, so würden sich dieselben, da sie ganz gleiche Bestandtheile enthalten, gleich dem hexaëdrischen Eisenkiese zu dem prismatischen Eisenkiese verhalten.

Herr *Heinrich Rose* hat nachgewiesen, daſs der Wismuthglanz aus Schweden kein Tellur, dagegen aber 18.72 Schwefel enthalte. Der Wismuthglanz von Rezbanya enthält nur 4.92 Schwefel und 35.24 Tellur, das spec. Gew. desselben muſs also auch gröſser als jenes

des schwedischen seyn, was die Erfahrung ebenfalls bestätiget; es können demnach zwei in ihren naturhistorischen sowohl als chemischen Eigenschaften sehr abweichende Mineralien nicht vereinigt bleiben, sondern der Rezbanyaer Wismuthglanz mufs von dem schwedischen als wesentlich verschieden getrennt, und mit dem beschriebenen Mineral von Schoubkau vereinigt werden.

Es verdient hier bemerkt zu werden, dafs durch chemische Untersuchung die beobachteten naturhistorischen Eigenschaften eines Individuums berichtigt werden, denn nur durch Auflösung des Rezbanyaer Wismuthglanzes in Säuren wird die mechanische Beimengung des rhomboëdrischen Quarzes in demselben, und die durch diesen bedingte Unrichtigkeit des spec. Gewichtes desselben erwiesen.

Schon *Selb* hat im Taschenbuche der Mineralogie, neunten Bandes, pag. 451, nachgewiesen, dafs der Wismuthglanz von Johann Georgenstadt dem Wismuthkupfererze angehöre; ob der Wismuthglanz von Altenberg, Schneeberg in Sachsen, jener von Joachimsthal in Böhmen, von Radruth in Kornwall, und von dem beresofskischen Gebirge in Siberien blofs Wismuth-Sulfurid, wie jener von Riddarhyttan in Schweden, oder aber auch Tellur, wie jener von Schoubkau und Rezbanya enthalte, ob es endlich wirklich einen Wismuthglanz gebe, welcher, wie *Sage* angibt, 60 Wismuth und 40 pCt. Schwefel, also $Bi\,S^6$ enthalte, ist demnach noch zu untersuchen.

Der Verfasser mufs sich auf die Untersuchung des sogenannten Molybdänsilbers von Deutsch-Pilsen beschränken, da demselben die Wismuthglanze aus den besagten Gegenden nicht zu Gebote stehen.

Untersuchung des sogenannten Molybdänsilbers von Deutsch-Pilsen.

Die königl. bergakademische Mineralien-Sammlung besitzt ein kleines Stückchen dieses seltenen Minerals, und es war daher möglich, es mit dem oben beschriebenen genau zu vergleichen, und zugleich dessen chemische Zusammensetzung zu erforschen.

Es wird zwar angegeben, dafs *Klaproth* dasselbe bereits untersuchte, und solches aus 95 pCt. Wismuth und 5 pCt. Schwefel zusammengesetzt gefunden habe.

Da aber dieses Mineral wirklich Tellur enthält, welches *Klaproth* wohl erkannt haben würde, so bezweifelt der Herr geheime Rath von *Leonhard* mit vielem Grunde, dafs dieser verdienstvolle Chemiker dieses Mineral wirklich zerlegt habe.

Das vorliegende Exemplar ist ein Theilungsstück, aus welchem sich dessen Grundgestalt, welche Hr. Prof. *v. Mohs* für rhomboëdrisch erklärte, durchaus nicht wahrnehmen läfst.

Die Theilbarkeit ist ausgezeichnet und monotom; überdiefs besitzt dieses Mineral noch eine, obwohl unvollkommene, Theilbarkeit, welche senkrecht auf der erstern zu stehen scheint.

Die Farbe ist licht stahlgrau, und selbst auf ganz frischen Theilungsflächen in's Röthliche spielend; vergleicht man dieselbe mit jener des oben beschriebenen Minerals von Schoubkau, so findet man sie wesentlich verschieden.

Der Glanz ist metallisch und stark, mit dünnen Blättchen ist es elastisch biegsam.

Die Härte ist = 2.5, und das Mineral von Schoubkau wird von demselben ausgezeichnet geritzt.

Das spec. Gew. ist nach mehrmaligen Versuchen und bei 14° *R.* = 8.440. *Breithaupt* gibt es = 8.0 an.

Vor dem Löthrohre verbreitet es einen sehr schwachen Schwefel- und Selengeruch, schmilzt übrigens leicht mit Entwickelung eines weifsen Dampfes, welcher in der Nähe des Kornes die Kohle gelb, von diesem entfernt dieselbe weifs beschlägt.

Die Löthrohrflamme wird ausgezeichnet blau gefärbt.

In Salpetersäure löset es sich leicht auf, und hinterläfst gelbe Flocken, welche aber beim anhaltenden Kochen gänzlich verschwinden.

Versetzt man die erzeugte Auflösung mit Chlorwasserstoffsäure, so entsteht ein weifser käsiger Niederschlag, welcher am Sonnenlichte schwarz wird; theilt man der Auflösung schwefeligsaures Ammoniak zu, so setzt sich in kurzer Zeit metallisches Tellur ab.

Zu Folge dieser vorläufigen Untersuchung enthält das sogenannte Molybdänsilber Wismuth, Tellur, Silber und Schwefel, nebst Spuren von Selen.

Quantitative Untersuchung.

11.6 Gr. dieses Minerals wurden in Salpetersäure gelöst, sie liefsen 0.11 Schwefel zurück, welcher, auf einem Platinlöffel erhitzt, vollständig abbrannte.

Die Auflösung wurde mit Chlorwasserstoffsäure versetzt. Das gefällte Silberchlorid, gesammelt und getrocknet, wog 0.330 Gr., welches 0.24 Gr. metallischem Silber entspricht; zur gröfsern Sicherheit wurde das Filtrum sammt dem Silberchlorid in eine Bleiplatte gewickelt, und letzteres auf einem Treibscherben abgetrieben. Das Silberkorn, welches auf diese Art erhalten wurde, wog 0.22 Gr.

Die Flüssigkeit wurde nun mit einer verdünnten, mit etwas Chlorwasserstoffsäure sauer gemachten Baryumchloridlösung versetzt, und Tags darauf abfiltrirt. Der erhaltene schwefelsaure Baryt wog 1.20, und ent-

spricht 0.16 Schwefel, welcher demnach in Verbindung mit dem obigen 0.27 Gr. beträgt.

Zur Fällung des überschüssig zugesetzten Baryts wurde nun die Flüssigkeit mit verdünnter Schwefelsäure, und als keine Fällung mehr erfolgte, mit reinem Ammoniak, endlich mit schwefelwasserstoffsaurem Schwefelammoniak im Übermafs versetzt, und mit demselben durch längere Zeit in Digestion erhalten, um das gebildete Tellur-Sulfurid vollständig aufzulösen, hierauf das Wismuth-Sulfurid gesammelt, mit Salpetersäure zerlegt, mit kohlensaurem Ammoniak gefällt, getrocknet und ausgeglüht; es wog 8.00 Gran, und entspricht 7.19 Wismuth.

Aus der schwefelwasserstoffsauren Schwefelammoniaklösung wurde das Tellur-Sulfurid durch Chlorwasserstoffsäure gefällt, durch eine gleiche Säure, welcher etwas Salpetersäure zugetheilt wurde, zerlegt, und das Tellur mittelst schwefeligsaurem Ammoniak metallisch gefällt; es wog, bis zum beginnenden Schmelzen getrocknet, 3.45 Gr., woraus hervorgeht, dafs 11.6 Gr. des sogenannten Molybdänsilbers von Deutsch-Pilsen

Wismuth = 7.19,
Tellur = 3.45,
Silber = 0.24, und
Schwefel = 0.27,

nebst Spuren von Selen enthalten, aus welchen Daten die Rechnung für 100 Theile

Wismuth 61.15,
Tellur 29.74,
Silber . . . . . . 2.07, und
Schwefel . . . . 2.33, oder

1 Atom Wismuth-Sulfurid = 17.73,
1 Atom Silber-Telluret = 3.28, und
1 Atom Wismuth-Telluret = 75.09

gleich $BiS + AgTe + BiTe$ ergibt.

Das Molybdänsilber enthält demnach allerdings Silber, und ist sowohl durch die chemische Zusammensetzung als auch durch die naturhistorischen Eigenschaften von dem Wismuthglanze und von dem beschriebenen Mineral von Schoubkau wesentlich verschieden, obwohl es dem letzten am meisten verwandt ist, und daher im naturhistorischen Systeme an dasselbe gereiht werden mufs.

Das Molybdänsilber dem Wismuthglanze zu unterordnen, wie diefs Herr Prof. *Haidinger* gethan hat, dürfte nur die analoge chemische Zusammensetzung, nicht aber dessen naturhistorische Eigenschaften gestatten, indem das spec. Gewicht fast um 2.000 abweicht, und daher dasselbe ausschliefset.

Da Herr Prof. *Berzelius* auch das Molybdänsilber Borns untersuchte, und in demselben weder einen Schwefel noch einen Silbergehalt fand, so wird es wahrscheinlich, dafs zu Deutsch-Pilsen (Börseny) nächst Gran in Ungarn mehrere tellurhältige Mineralien vorkamen, deren genauere Untersuchung vielleicht bald möglich wird, da der seit vielen Jahren aufgelassene Bau daselbst seit einigen Monaten neuerdings aufgenommen wurde.

III.
Über Sonnenuhren;

von
J. J. Littrow.

Obschon dieser Gegenstand an sich selbst und in Beziehung auf die analytischen Entwickelungen, zu welchen er Veranlassung gibt, sehr interessant ist, so scheint er doch seit Langem einer ohne Zweifel ganz unverdienten Vernachlässigung Preis gegeben zu seyn. Mir wenigstens ist nicht bekannt, daſs man bei der Untersuchung derjenigen Linien, welche das Ende des Schattens auf den Uhrflächen beschreibt, über die gegen den Horizont senkrechten Ebenen herausgegangen wäre, und noch viel weniger scheint man sich mit der analytischen Bestimmung der Sonnenuhren auf krummen Flächen beschäftiget zu haben. Das Folgende soll ein Versuch seyn, diese Versäumnisse nachzuholen.

Nehmen wir an, daſs in irgend einem gegebenen Puncte einer krummen Fläche, deren Gleichung ebenfalls gegeben ist, eine gerade Linie parallel mit der Weltaxe befestiget sey. Wir wollen diesen Punct für den Durchschnitt von drei unter sich senkrechten Coordinaten x, y, z annehmen, und jene gerade Linie, den Stil der Uhr, in die Axe der z legen, so daſs also die Ebene der xy die des Äquators ist. Denkt man sich durch den Stil eine Ebene gelegt, die immer durch den Mittelpunct der Sonne geht, so wird diese Ebene senkrecht auf dem Äquator stehen, und daher die Ebene eines Stundenkreises seyn. Da aber der Schatten des Stiles, wenn er von der Sonne beschienen wird, ganz in diesen Stundenkreis fällt, so wird auch die gesuchte

Schattenlinie der Uhrfläche der Durchschnitt derselben mit jener Stundenebene seyn. Hat man daher die Gleichung der Stundenebene zwischen denselben bereits angeführten Coordinaten, so werden diese beiden Gleichungen, der Stundenebene und der Uhrfläche, zusammen genommen die gesuchten Gleichungen der verschiedenen Schattenlinien seyn, d. h. ihrer Projectionen in den drei coordinirten Ebenen der xy, xz und yz.

Da aber diese krummen Schattenlinien, als durch den Schnitt einer Ebene mit einer Fläche entstanden, ebenfalls ebene Curven von einfacher Krümmung seyn müssen, so wird man, ihre Gestalt einfacher zu übersehen, nicht sowohl ihre Projectionen in den coordinirten Ebenen, als vielmehr sie selbst in der schneidenden Ebene des Stundenkreises aufsuchen. Diese erhält man aber sehr leicht, wenn man in den beiden erwähnten Gleichungen zwischen x, y und z die Gröſsen $x = t \cos. s$, $y = t \sin. s$ und $z = u$ substituirt, wo s der gegebene Stundenwinkel der Sonne, und t, u die senkrechten Coordinaten der Schattenlinie sind, so daſs t von dem Fuſspuncte des Stiles im Anfange der Coordinaten und in dem Durchschnitte der Stundenebene mit dem Äquator, u aber in der Ebene des Stundenkreises senkrecht auf t genommen wird. Diese Betrachtungen, durch die Analyse ausgedrückt, werden uns eine vollständige Kenntniſs dieser Schattenlinien, ihrer Gestalt und Lage nach, geben. Es wird dann noch übrig seyn, das Ende dieser Schattenlinien aufzusuchen, und die verschiedenen krummen Linien zu bestimmen, welche dieses Schattenende auf der Uhrfläche sowohl während dem Laufe eines Tages, dessen Sonnendeclination gegeben ist, als auch für jeden einzelnen gegebenen Stundenwinkel während dem Laufe eines ganzen Jahres beschreibt. Ist r die Länge des Stils, und ρ die Entfernung des Schatten-

endes von dem Fuſspuncte des Stiles, so wird die gerade Linie das Ende des Schattens in der Uhrfläche geben, welche durch das freie Ende des Stiles und durch den Mittelpunct der Sonne geht. Da sich aber die Sonne während einem Tage um die ganze Peripherie ihres Parallelkreises um den Stil bewegt, so wird sich auch jene gerade, durch die Sonne gehende Linie, um das freie Ende des Stiles, als um einen festen Punct bewegen, und während dieser Bewegung mit dem Stile selbst immer denselben Winkel bilden, vorausgesetzt, daſs die Declination der Sonne während einem Tage unveränderlich ist, d. h. mit andern Worten: jene Gerade wird täglich die Oberfläche eines Kegels beschreiben, dessen Spitze in dem freien Ende des Stils, und dessen Axe dieser Stil selbst seyn wird. Die Oberfläche dieses Kegels wird die Uhrfläche in einer krummen Linie, im Allgemeinen von doppelter Krümmung schneiden, und man wird diese krumme Linie erhalten, wenn man die Gleichung der Uhrfläche und die des Kegels als coexistirend betrachtet. Dieser Kegel wird ferner auch die Stundenebene in einer Curve von einfacher Krümmung, oder genauer in einer geraden Linie schneiden, da die den Kegel schneidende Stundenebene immer durch die Axe des Kegels geht, und man wird diese gerade Linie erhalten, wenn man die beiden Gleichungen des Kegels und der Stundenebene zusammen betrachtet. Die Oberfläche dieses Kegels wird endlich auch die Schattenlinien schneiden, und da diese Schattenlinien, nach dem Vorhergehenden, die Durchschnitte der Stundenebene mit der Uhrfläche sind, so wird man den Durchschnittspunct des Kegels mit der Schattenlinie erhalten, wenn man alle drei Gleichungen, der Uhrfläche, der Stundenebene und des Kegels, zugleich Statt haben läſst. Sucht man nämlich aus diesen drei Gleichungen die Werthe

von x, y und z durch die gegebenen Gröſsen des Problemes, so wird die Distanz ρ dieses gemeinschaftlichen Durchschnittspunctes der drei genannten Flächen gleich

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

seyn, und diese Gröſse ρ wird zugleich die Distanz des Schattenendes für jede Schattenlinie von dem Fuſspuncte des Stiles seyn. Dieser Ausdruck von ρ wird, der Natur des Problemes zu Folge, eine Function des Stundenwinkels s der Sonne, der Declination δ der Sonne und der Polhöhe φ des Ortes der Oberfläche der Erde seyn, an welchem man die Uhr errichtet hat, und er wird überdieſs noch mehrere constante Gröſsen enthalten können, welche von der Gestalt und Lage der gewählten Uhrfläche abhängen. Dieses vorausgesetzt, wird man diesen Ausdruck $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ als die Gleichung einer Curve zwischen zwei Polarcoordinaten, z. B. ρ und s, betrachten können, und indem man in ihr der Gröſse s nach und nach alle Werthe von 0 bis 360 gibt, wird man alle die Puncte der Uhrfläche bestimmen, durch welche während dem Laufe eines Tages, an welchem die Sonne eine bestimmte Declination δ hat, das Ende des Schattens geht. Wiederholt man diese Bestimmungen für alle Werthe von δ von $+ 23\frac{1}{2}$ bis $- 23\frac{1}{2}$ Grad, so wird man die Uhrfläche ganz mit diesen auf einander folgenden Curven der täglichen Bewegung des Schattenendes überziehen. Betrachtet man aber jene Gleichung als eine für die Gleichung einer Curve zwischen den Polarcoordinaten ρ und δ, so wird man z. B. für den Mittag, wo $s = 0$ ist, die Curve auf der Uhrfläche erhalten, die das Schattenende des wahren Mittags während einem ganzen Jahre durchläuft, und wenn man auch diese Bestimmung für alle Werthe von s von 0 bis 360 wiederholt, so wird man eine Anzahl von aufeinan-

der folgenden Curven erhalten, welche das vorher betrachtete System von Curven schneiden, und mit ihnen zusammen betrachtet eine Art von Netz bilden werden, welches den ganzen Theil der Uhrfläche bedecken wird, der von dem Schatten des Stiles erreicht werden kann. Setzt man endlich für die einzelnen Stunden 1^h, 2^h, 3^h, . . . nicht $s = 15^\circ$, 30°, 45°, . . ., sondern diese Winkel $\pm$ der Zeitgleichung der gegebenen Tage, so wird man die Schattenlinien und alle bisher betrachteten krummen Linien für die sogenannte mittlere Sonnenuhr erhalten, die man bisher nur für vertical stehende Uhrebenen, und auch in diesen nur für den mittleren mittägigen Schatten ausgeführt hat.

Die Anwendung der bisher angeführten Betrachtungen bietet keine andere Schwierigkeit dar, als die, welche aus dem Geschäfte der Elimination folgen. Der Zustand unserer Analyse erlaubt uns nur selten, diese Elimination auf Gleichungen anzuwenden, die über den zweiten Grad gehen. Indessen darf man, wenn einmal für jeden speciellen Fall, z. B. die drei Gleichungen für das Schattenende gefunden sind, das Problem als aufgelöst betrachten, so wie man in der Mechanik jede Aufgabe als aufgelöst ansieht, wenn die die Auflösung enthaltende Differenzialgleichung der zweiten Ordnung gegeben ist. Die Integration dieser Gleichungen geht die Mechanik unmittelbar eben so wenig an, als die Elimination jener die Gnomonik angeht, und es ist in beiden Fällen bloſs die Sache der Analyse, die von der Wissenschaft innerhalb ihren Grenzen gegebene Auflösung jedes Problems auf dem Gebiete der reinen Mathematik weiter zu führen.

Gehen wir nun zu der Ausführung der vorhergehenden allgemeinen Darstellung über, und wählen wir zuerst zur Uhrebene irgend eine willkürlich gegen den

Horizont und gegen den Meridian geneigte Ebene. Ist n die Neigung dieser Ebene gegen den Horizont, und ist k der Winkel ihres Durchschnittes im Horizonte mit der ebenfalls horizontalen Mittagslinie, der Winkel n von Nord nach Süd bis 90°, und der Winkel k von Süd nach West bis 360° gezählt, so hat man bekanntlich für die Gleichung dieser Uhrebene

$$z = \xi \text{ tang. } n \text{ sin. } k + v \text{ tang. } n \text{ cos. } k, \quad . \quad \text{(I.)}$$

wo ξ in der Mittagslinie und ξv im Horizonte, also z auf dem Horizonte senkrecht steht. Der Anfang dieser Coordinaten ist in dem Fuſspuncte des Stils, der der Weltaxe parallel vorausgesetzt wird, also in einem Puncte der Uhrebene selbst genommen. Da die Stundenebene senkrecht auf dem Äquator steht, und mit der Ebene des Meridians den Winkel s bildet, so ist ihre Gleichung, wie man leicht findet,

$$z = \xi \text{ tang. } \varphi - v \frac{\text{Cotang. } s}{\text{cos. } \varphi} \quad . \quad . \quad . \quad \text{(II.)}$$

Beide Gleichungen, zusammen betrachtet, geben nach dem Vorhergehenden die Schattencurve auf der Uhrebene, die also hier, wie die Gleichungen zeigen, eine gerade Linie ist. Um diese Gerade zu fixiren, denke man sich eine durch die Mittagslinie im Horizonte senkrecht stehende Ebene, die die Uhrebene in einer andern Geraden schneiden wird, welche wir die *Mittagslinie der Uhrebene* nennen wollen. Da für diese Linie, die man immer leicht durch die bekannten practischen Verfahren finden kann, die Gröſse v verschwindet, so sind ihre Gleichungen

$$v = 0 \quad \text{und}$$

$$z = \xi \text{ tang. } n \text{ sin. } k.$$

Da sonach die Gleichungen der Schattenlinie und der Mittagslinie der Uhr bekannt sind, so läſst sich auch

der Winkel finden, welchen diese beiden Linien im Fuſspuncte des Stiles unter sich bilden. Nennt man ψ diesen Winkel, so erhält man

$$\text{Cotang.}\,\psi = \frac{\sin.n\cos.k\,(\sin.n\sin.\varphi\sin.k + \cos.n\cos.\varphi)}{\sin.n\cos.\varphi\sin.k - \cos.n\sin.\varphi} + \frac{(\cos.^2 n + \sin.^2 n\sin.^2 k)\,\text{Cotang.}\,\varsigma}{\sin.n\cos.\varphi\sin.k - \cos.n\sin.\varphi}.$$

Wir wollen nun auch die Gleichung des Kegels suchen, der durch die Umdrehung der geraden Linie entsteht, die immer durch das freie Ende des Stils und durch den Mittelpunct der Sonne geht. Da die Spitze dieses Kegels durch den Endpunct des Stiles geht, dessen Länge r ist, und da seine Axe, der Stil selbst, mit dem Horizonte den Winkel $180 - \varphi$, und mit jeder seiner Seitenlinien den Winkel $90 + \delta$ bildet, so erhält man, wenn man das bekannte, zuerst von *Monge* gegebene Verfahren für die conischen Flächen anwendet, für die Gleichung dieses Kegels den Ausdruck

$$\xi^2(\sin.^2\delta - \cos.^2\varphi) + z^2(\sin.^2\delta - \sin.^2\varphi) - 2\xi z\sin.\varphi\cos.\varphi + (v^2 - r^2)\cos.^2\delta + 2r(\xi\cos.\varphi + z\sin.\varphi)\cos.^2\delta = 0. \text{ (III.)}$$

Um das Ende der Schattenlinie zu finden, soll, dem Vorhergehenden gemäſs, die Gröſse ξ, ψ und z aus den drei Gleichungen I., II. und III. durch Elimination gefunden werden. Diese Elimination geht hier allerdings an, da die gegebenen Gleichungen nun des zweiten Grades sind. Da sie aber doch, wie schon ihr Anblick zeigt, auf sehr umständliche Entwickelungen führen, so wird es angemessener seyn, die bisher gebrauchten Coordinaten ξ, v, z auf die bereits oben erwähnten x, y und z zurückzuführen, die mit diesen denselben Anfangspunct haben, wo aber z in der Linie des Stiles, und xy in der Ebene des Äquators liegen, der auf dem Stile senkrecht steht. Zwar wird durch diese Änderung der

Coordinaten die Gleichung der Uhrebene nicht leicht einfacher werden, da die Lage derselben gewöhnlich gegen den Horizont, nicht gegen den Äquator gegeben wird. Allein die beiden andern Gleichungen der Stundenebene und des Lichtkegels werden offenbar einfacher werden, da sich beide unmittelbar auf den Äquator beziehen. Ja selbst die Gleichung der Uhrebene wird eine einfachere Gestalt annehmen, wenn man die auf den Horizont sich beziehenden Gröſsen n und k, wodurch die Lage der Uhrebene bestimmt wurde, auf zwei andere Gröſsen β und γ bringt, welche die Lage der Uhrebene gegen den Äquator ausdrücken. Ist nämlich β der Winkel der Mittagslinie der Uhrebene mit dem aus dem Fuſspuncte des Stiles auf den Horizont herabgelassenen Verticale, und ist γ die Neigung der Uhrebene gegen den Meridian, so hat man

$$\sin.\beta \sin.\gamma = \cos.n \quad \text{und}$$
$$\cos.\beta \sin.\gamma = \sin.n \sin.k;$$

und mit diesen Werthen erhält man, wie man leicht sieht, für die Uhrebene die Gleichung

$$z = -x \,\text{tang.}(\varphi + \beta) - \frac{y \,\text{Cotang.}\gamma}{\cos.(\varphi + \beta)}, \quad . \quad (\text{I}'.)$$

und eben so für die Stundenebene

$$y = x \,\text{tang.}\, s, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II}'.)$$

und endlich für den Lichtkegel

$$x^2 + y^2 = (z - r)^2 \,\text{Cotang.}^2 \delta \quad . \quad (\text{III}'.)$$

Die Gleichungen I′. und II′., zusammen genommen, gaben die Schattenlinien. Setzt man in ihnen $y = 0$, so erhält man die Gleichungen der Mittagslinie der Uhr, oder

$$y = 0,$$
$$z = -x \,\text{tang.}(\varphi + \beta).$$

Nennt man daher wieder ψ den Winkel der Schat-

tenlinie mit der Mittagslinie der Uhr, so erhält man aus den vier vorhergehenden Gleichungen

$$\text{tang.}\,\psi = \frac{\cos.(\varphi+\beta)}{\sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma + \sin.\gamma\,\text{Cotang.}\,s}$$

übereinstimmend mit dem oben gefundenen Werthe von ψ.

Eliminirt man aus den Gleichungen I'., II'., III'. je zwei der drei Gröfsen x, y und z, so erhält man, nach dem Vorhergehenden, den Ort für den Endpunct der Schattenlinie. Da es für die Ausübung bequemer seyn wird, diese Gröfsen x, y, z nicht durch den Stundenwinkel s der Sonne, sondern unmittelbar durch den Stundenwinkel ψ der Uhr selbst auszudrücken, so wird man, dem letzten Ausdrucke von tang. ψ zu Folge, statt der Gleichung II'. die folgende setzen:

$$y = \frac{x \sin.\gamma}{\cos.(\varphi+\beta)\,\text{Cotang.}\,\psi - \sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma}.$$

Nimmt man dann die angezeigte Elimination vor, und setzt der Kürze wegen

$$Q = \sin.(\varphi+\beta) + \cos.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tang.}\,\psi$$
$$+\text{tg.}\delta.\sqrt{[\cos.(\varphi+\beta)-\sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tg.}\psi]^2+\sin.^2\gamma\,\text{tg.}^2\psi}$$

so erhält man

$$\frac{x}{r} = \frac{\sin.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tang.}\,\psi - \cos.(\varphi+\beta)}{Q},$$

$$\frac{y}{r} = -\frac{\sin.\gamma\,\text{tang.}\,\psi}{Q},$$

$$\frac{z}{r} = \frac{\cos.(\varphi+\beta)\cos.\gamma\,\text{tang.}\,\psi + \sin.(\varphi+\beta)}{Q},$$

wodurch der Ort des Schattenendes auf der Uhrebene für jeden Winkel ψ oder für jede einzelne Schattenlinie gegeben ist. Nennt man dann ρ die Entfernung dieses Punctes von dem Fufspuncte des Stils, oder ist ρ die gesuchte Länge des Schattens, so hat man

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

oder

$$\rho = \frac{r}{Q \cos.\psi}.$$

Das Vorhergehende enthält alles, was man von Sonnenuhren auf gegebenen Ebenen verlangen kann, da die Bestimmung und Verzeichnung der durch die letzte Gleichung gegebenen Curven und des ganzen oben erwähnten Netzes der Uhrebene keine weitere Schwierigkeit, als die Mühe der Ausführung, haben kann. Setzt man z. B., um die Eigenschaft der von dem Schattenende beschriebenen Curve näher zu kennen, in der letzten Gleichung

$$X = \rho \cos.\psi, \quad Y = \rho \sin.\psi \quad \text{und} \quad \rho^2 = X^2 + Y^2,$$

so erhält man für die Gleichung der täglichen Curve des Schattenendes

$$\begin{aligned} & Y^2 \left(\cos.^2(\varphi+\beta)\cos.^2\gamma - \sin.^2\delta\right) \\ & + X^2\left(\sin.^2(\varphi+\beta) - \sin.^2\delta\right) \\ & + 2XY\sin.(\varphi+\beta)\cos.(\varphi+\beta)\cos.\gamma \\ & - 2r\cos.^2\delta\left(Y\cos.(\varphi+\beta)\cos.\gamma + X\sin.(\varphi+\beta)\right) \\ & + r^2\cos.^2\delta = 0, \end{aligned}$$

welches die Gleichung einer Linie der zweiten Ordnung, und zwar einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, wenn $\cos.^2(\varphi+\beta)\sin.^2\gamma$ gröſser oder kleiner, oder so groſs als $\cos.^2\delta$ ist.

Wendet man die vorhergehenden allgemeinen Ausdrücke auf die verschiedenen bisher gewöhnlichen Uhren an, so erhält man folgende einfache Resultate.

Horizontaluhren.

Für sie ist $n = 0$, $k = 90$ und $\beta = \gamma = 90$, also

$$\text{tang.}\psi = -\sin.\varphi\,\text{tang.}s,$$

wie bekannt.

Ferner ist

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi\cos.\varphi + \text{tang.}\,\delta\sqrt{1-\cos.^2\psi\cos.^2\varphi}},$$

und die krumme Linie, welche das Ende des Schattens an jedem Tage beschreibt, eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn $\varphi + \delta$ gröſser oder kleiner, oder gleich 90° ist. Für den Kreis ist $\varphi = 90$.

Geneigte Mittagsuhren.

Für sie ist $k = 90$, $\beta = 90 - n$ und $\gamma = 90$, also

$$\text{tang.}\,\psi = \sin.(n-\varphi)\,\text{tang.}\,s,$$

$$\frac{\rho}{r} = \frac{1}{\cos.\psi\cos.(n-\varphi) + \text{tang.}\,\delta\sqrt{1-\cos.^2\psi\cos.^2(n-\varphi)}};$$

und die tägliche Curve des Schattenendes eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, wenn δ gröſser, kleiner, oder so groſs als $90 - n + \varphi$ ist. Für den Kreis ist $n - \varphi = 90$.

Für verticale Mittagsuhren setzt man in diesen Ausdrücken $n = 90^\circ$.

Verticale Morgen- und Abenduhren.

Für sie ist $n = 90$, $k = 0$, $\beta = \gamma = 0$, also $\psi = 90 - \varphi$, oder die Schattenlinien mit dem Stile parallel, und $\rho = r$.

Äquinoctialuhren.

Für sie ist $n = 90 + \varphi$, $k = 90$, $\beta = 360 - \varphi$, $\gamma = 90$, also

$$\psi = s \quad \text{und} \quad \rho = r\,\text{Cotang.}\,\delta,$$

und die von dem Schattenende an jedem Tage beschriebene Curve immer ein Kreis. Für Polaruhren endlich ist $n = \varphi$, $k = 90$, $\beta = 90 - \varphi$, $\gamma = 90$, und daher

$$\psi = 0 \quad \text{und} \quad \rho = r.$$

Ganz eben so, wie hier für eine gegen den Horizont und gegen den Meridian schief liegende Ebene ge-

zeigt ist, wird man nun auch für jede andere krumme Uhrfläche verfahren; nur wird man hier, statt dem Winkel ψ, die Gleichungen der krummen Schattenlinien selbst, entweder durch ihre Projectionen in den coordinirten Ebenen, oder durch ihren Ort in der die Uhrfläche schneidenden Stundenebene zwischen den oben erwähnten Coordinaten t und u angeben. Wählen wir, um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, einen Cylinder als Uhrfläche, dessen Basis ein Kreis des Halbmessers a, und dessen Axe auf dem Horizonte senkrecht steht. Solche Uhrflächen bieten z. B. viele unserer Thürme und andere Gebäude dar. — Die Gleichung der Oberfläche dieses Cylinders zwischen den sich auf den Äquator beziehenden Coordinaten x, y, z ist, wie man leicht findet,

$$z \cos.\varphi\,(z \cos.\varphi - 2a) + x \sin.\varphi\,(x \sin.\varphi - 2a) + 2xz \sin.\varphi \cos.\varphi + y^2 = 0 \quad . \quad (A)$$

Setzt man in diesem Ausdrucke

$$x = t \cos.s, \quad y = t \sin.s \quad \text{und} \quad z = u,$$

so erhält man

$$(u \cos.\varphi + t \sin.\varphi \cos.s)^2 - 2a\,(u \cos.\varphi + t \sin.\varphi \cos.s) + t^2 \sin.^2 s = 0$$

für die Gleichung der Schattencurve in der Ebene des Stundenkreises. Diese krumme Linie, welche den Schatten des Stiles auf der Oberfläche des senkrechten Cylinders für jeden Stundenwinkel s erzeugt, ist also immer eine Ellipse, und man wird die Aufeinanderfolge dieser Ellipsen erhalten, wenn man in der letzten Gleichung nach der Reihe s gleich 0, 15°, 30°, . . . setzt. Für den mittägigen Schatten hat man

$$u \cos.\varphi + t \sin.\varphi = 2a,$$

eine gerade Linie, da hier der Schatten des Stils mit

der Seitenlinie des Cylinders, die durch den Fuſspunct des Stils geht, zusammenfällt. Für $\varphi = 90^\circ$ geht die vorhergehende Gleichung der Schattencurve in

$$t = 2a \cos. s$$

über, welches die bekannte Polargleichung des Kreises ist. Für die Bewohner der beiden Pole steht nämlich der Stil parallel mit der Axe des Cylinders, da ihr Horizont mit dem Äquator zusammenfällt.

Um nun auch den Ort des Endpunctes des Schattens auf dem Cylinder zu erhalten, wird man die Gleichung (A) der Uhrfläche mit der Gleichung $y = x \tang. s$ der Stundenebene, und überdieſs mit der Gleichung des oben erwähnten Kegels verbinden. Diese Gleichung des Kegels ist hier

$$x = (z - r) \cos. s \operatorname{Cotang.} \delta.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen je zwei der drei Coordinaten x, y, z, so erhält man

$$z - r = \frac{M(a - r \cos. \varphi) + \sqrt{M^2 a^2 + N}}{M^2 + \sin.^2 s \operatorname{Cotang.}^2 \delta},$$

wo der Kürze wegen

$$M = \cos. \varphi + \sin. \varphi \cos. s \operatorname{Cotang.} \delta \quad \text{und}$$
$$N = r(2a - r \cos. \varphi) \cos. \varphi \sin.^2 s \tang.^2 \delta$$

gesetzt worden ist. Kennt man so den Werth von z, so erhält man auch y und x aus

$$y = (z - r) \sin. s \operatorname{Cotang.} \delta,$$
$$x = (z - r) \cos. s \operatorname{Cotang.} \delta,$$

wodurch daher der Ort des Schattenendes auf der Fläche des Cylinders gegeben ist. Die Entfernung ρ des Schattenendes von dem Fuſspuncte des Stiles ist dann

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{oder}$$
$$\rho = \sqrt{(z - r)^2 \operatorname{Cotang.}^2 \delta + z^2},$$

und dieser Ausdruck ist zugleich die Gleichung zwi-

schen den Polarcoordinaten ρ und s, oder ρ und δ für diejenigen Curven, welche das Schattenende für eine constante Declination während dem Laufe eines Tages, oder für einen constanten Stundenwinkel während dem Laufe eines ganzen Jahres auf der krummen Oberfläche des Cylinders beschreibt.

IV.

Analytische Optik;

von

L. Schleiermacher,

Grofsherzogl. Hessisch. Oberfinanzrath in Darmstadt.

(Fortsetzung.)

Glieder der zweiten Ordnung.

6) Beschäftigen wir uns zuerst mit den Gliedern der zweiten Ordnung, welche in den Gleichungen des gebrochenen Strahles vorkommen. Für ein beliebiges z sind diese Gleichungen nach Nro. 5:

$$\left.\begin{aligned} y_i &= Y_i - z_i\left[\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i\right] \\ &\quad - \left(\frac{z-g}{g}\right)_i\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i, \\ x_i &= X_i - z_i\left[\frac{X_i}{g_i} + X_i\Delta\frac{1}{g_i}\right] \\ &\quad - \left(\frac{z-g}{g}\right)_i\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i, \end{aligned}\right\} \quad (a)$$

welche auch unter die Form gebracht werden können:

$$\left.\begin{aligned}
y_i &= f_i - g_i\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
&\quad - (z-g)_i\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i + \left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\ &+ \frac{1}{g_i}\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right]_i\end{aligned}\right. \\
x_i &= -\, g_i\, X_i\, \Delta\frac{1}{g_i} \\
&\quad - (z-g)_i\left\{\begin{aligned}&\frac{X_i}{g_i} + X_i\,\Delta\frac{1}{g_i} \\ &+ \frac{1}{g_i}\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Sie reduciren sich auf

$$\left.\begin{aligned}
y_i &= f_i - g_i\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i \\
&\qquad\qquad - (z-g)_i\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i, \\
x_i &= -\, g_i\, X_i\, \Delta\frac{1}{g_i} - (z-g)_i\,\frac{X_i}{g_i},
\end{aligned}\right\} \quad \text{(c)}$$

wenn $(z-g)_i$ als eine Gröſse von der Ordnung der Abweichungen angenommen wird.

Nach Nro. 4 hat man

$$\frac{f_i}{g_i} = \frac{V_i\,\varphi_1}{v_i},$$

$$Y_i = \frac{1}{V_i}(Y'_1 + K_i\,\varphi_1),$$

$$X_i = \frac{X_1}{V_i},$$

$$Z_i = \frac{X_1^2 + (Y'_1 + K_i\,\varphi_1)^2}{2\,V_i^2\,a_i};$$

es bleibt daher nur noch übrig,

$$\Delta\frac{1}{g},\quad \left(Y'\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right),\quad \Delta Y \quad \text{und} \quad \Delta X$$

zu finden.

7) Um $\Delta \frac{1}{g}$ zu entwickeln, fange ich mit der Berechnung des Werthes von $\mathfrak{G}$ an, welcher durch die Formel (d) von Nro. 2 gegeben ist; und da jene Gröſse, eben so wie $\mathfrak{Z}$, zur zweiten Ordnung gehört, so kann man alle deutsche Buchstaben mit lateinischen verwechseln. Bezeichnet man daher durch G denjenigen Werth, welchen $\mathfrak{G}$ erhält, wenn man nur die Gröſsen der zweiten Ordnung berücksichtigt, so wird

$$G = (k + h)(t - w) - \frac{k}{n}\left(\frac{u}{2} - w\right) - \frac{Z}{g^2}.$$

Die Gröſsen, welche in diesem Ausdrucke vorkommen, sind durch die Formeln (b) und (c) von Nro. 2 gegeben, und man erhält daraus

$$\frac{1}{g} = k + h - \frac{k}{n},$$

$$\frac{1}{a} = k + h,$$

$$Z = \left(\frac{k+h}{2}\right) 2aZ,$$

$$l = \frac{1}{n^2}\left[k^2 . 2aZ + 2kYhb + h^2 b^2\right];$$

$$m = -kh . 2aZ - 2hYhb + h^2 b^2,$$

$$t = m - (k+h)Z - \frac{kYhb}{n^2} - \frac{h^2 b^2}{n^2}$$

$$= -\left[\frac{(k+h)^2}{2} + kh\right] 2aZ - \left(2h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2,$$

$$u = m - l$$

$$= -\left(kh + \frac{k^2}{n^2}\right) 2aZ - 2\left(h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2,$$

$$w = u - (k+h)^2\, 2aZ$$

$$= -\left[(k+h)^2 + kh + \frac{k^2}{n^2}\right] 2aZ$$

$$- 2\left(h + \frac{k}{n^2}\right) Yhb + \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) h^2 b^2,$$

$$\frac{Z}{g^2} = \left(\frac{k+h}{2}\right)\left[k + h - \frac{k}{n}\right]^2 2aZ$$

$$= \left[\frac{(k+h)^3}{2} - (k+h)^2 \frac{k}{n} + \frac{(k+h)}{2} \frac{k^2}{n^2}\right] 2aZ,$$

welche Werthe in dem vorhergehenden Ausdrucke von G substituirt werden müssen. Setzt man aufserdem zur Abkürzung, da die grofsen Buchstaben A, B u. s. w. nicht mehr gebraucht werden,

$$\left.\begin{aligned} A &= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right) k^2 (k - nh) \\ &= -\left(\frac{n-1}{2n^3}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)^2 \left(\frac{1}{a} - \left(\frac{n+1}{c}\right)\right), \\ B &= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right) k (k - nh) \\ &= -\left(\frac{n-1}{n^2}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{a} - \left(\frac{n+1}{c}\right)\right), \\ C &= -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right) k = -\left(\frac{n^2-1}{2n}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right), \end{aligned}\right\} \quad \text{(a)}$$

so ist das Resultat jener Substitution

$$G = -\left[A\, 2aZ + BY\frac{hb}{n} + C\left(\frac{hb}{n}\right)^2\right]. \quad \text{(b)}$$

Bezieht man diese Formel auf die i^{te} Fläche, und substituirt statt Z_i, Y_i und $\left(\frac{hb}{n}\right)_i$ ihre Werthe, welche am Ende von Nro. 6 gegeben sind, wenn man bemerkt, dafs

$$\left(\frac{hb}{n}\right)_i = \left(\frac{b}{nc}\right)_i = \frac{f_i}{g_i} = \frac{V_i\, \varphi_1}{v_i}$$

ist, so erhält man

$$G_i = -\frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{Av}{V^4}\right)_i (X_1^2 + Y_1^2) \\ + \left(\frac{2AvK}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_i Y_1 \varphi_1 \\ + \left(\frac{AvK^2}{V^4} + \frac{BK}{V^2} + \frac{C}{v}\right)_i \varphi_1^2 .\end{array}\right\} \quad (c)$$

Ich gehe nun zu der Gleichung (c) von Nro. 2 über. Behält man nur die Glieder der zweiten Ordnung bei, so hat man

$$\frac{1}{\mathfrak{g}} = \frac{1}{g} + \Delta\frac{1}{g},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{c}} = \frac{1}{c} + \Delta\frac{1}{c},$$

$$\mathfrak{k} + \mathfrak{h} = \frac{1}{a} = k + h,$$

$$\frac{\mathfrak{k}}{n} = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{c} - \Delta\frac{1}{c}\right] = \frac{k}{n} - \frac{1}{n}\Delta\frac{1}{c},$$

$$\mathfrak{G} = G.$$

Substituirt man diese Werthe, und bemerkt, dafs

$$\frac{1}{g} = k + h - \frac{k}{n}$$

ist, so nimmt die allegirte Gleichung die Gestalt an:

$$\Delta\frac{1}{g} = \frac{1}{n}\Delta\frac{1}{c} + G \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Man hat eben so

$$\Delta\frac{1}{g_{,}} = \frac{1}{n_{,}}\Delta\frac{1}{c_{,}} + G_{,},$$

und vermöge der zweiten Formel (g) von Nro. 2:

$$\Delta\frac{1}{c_{,}} = \frac{g^2}{c_{,}^2}\Delta\frac{1}{g},$$

Hierdurch verwandelt sich die vorhergehende Gleichung, wenn man sie auf die i^{te} Fläche bezieht, in die folgende endliche Differenzengleichung:

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{g_{i-1}^2}{n_i c_i^2}\Delta\frac{1}{g_{i-1}} + G_i \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

Das Integral dieser Gleichung, nach der Formel (r) von Nro. 3 genommen, ist

$$\Delta \frac{1}{g_i} = \left[\frac{g_{i-1}^2}{n_i c_i^2}\right]^{i-1} \left\{ \frac{g_0^2}{n_1 c_1^2} \Delta \frac{1}{g_0} + \Sigma_{m}^{i}{}_{1} \frac{G_m}{\left[\frac{g_{m-1}^2}{n_m c_m^2}\right]^{m-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{[n_i]^i} \left[\frac{g_{i-1}^2}{c_i^2}\right]^{i-1} \left\{ \frac{g_0^2}{c_1^2} \Delta \frac{1}{g_0} + \Sigma_{m}^{i}{}_{1} \frac{G_m [n_m]^m}{\left[\frac{g_{m-1}^2}{c_m^2}\right]^{m-1}} \right\}$$

Die Formeln (i) von Nro. 2 und (g) von Nro. 4 geben aber

$$\frac{g_0^2}{c_1^2} \Delta \frac{1}{g_0} = \Delta \frac{1}{c_1},$$

$$[n_i]^i = v_i,$$

$$\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1} = V_i.$$

Hierdurch wird das vorhergehende Integral

$$\Delta \frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i} \left[\Delta \frac{1}{c_1} + \Sigma_{1}^{i} \frac{G_m v_m}{V_m^2} \right] \quad . \quad . \quad \text{(f)}$$

Die Constante $\Delta \frac{1}{c_1}$ ist $= 0$, wenn der Punct b_1 c_1 ein wirklicher leuchtender Punct ist, dessen Entfernung sich nicht verändert. Da aber derselbe einem schon vorher gebrochenen Lichtstrahle angehören kann, die optischen Werkzeuge auch oft zur Betrachtung von Gegenständen gebraucht werden, welche sich in verschiedenen Entfernungen befinden, so behalte ich nicht nur jene Constante, sondern auch diejenigen, welche in der Folge vorkommen werden, bei. Es bleibt jetzt nur noch übrig, statt G_m seinen Werth zu substituiren. Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} L^{(m)} &= \left(\frac{A v}{V^4}\right)_m, \\ M^{(m)} &= \left(\frac{2 A v K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m, \\ N^{(m)} &= \left(\frac{A v K^2}{V^4} + \frac{B K}{V^2} + \frac{C}{v}\right)_m \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (g)$$

so gibt der Ausdruck (c)

$$G_m = -\frac{V^4_m}{v_m}\left[L^{(m)}\,(X_1^{2} + Y_1^{\prime 2}) + M^{(m)}\,Y_1^{\prime}\,\varphi_1 + N^{(m)}\,\varphi_1^2\right].$$

Da in der Folge die von $m = 1$ bis $m = i$ genommenen Summen der mit dem oberen Index (m) versehenen Coefficienten häufig vorkommen, so werde ich zur Abkürzung diese Summen mit denselben Buchstaben und dem unteren Index i bezeichnen, wonach z. B.

$$L_i = \Sigma_1^i\, L^{(m)}$$

bedeutet. Hierdurch erhält man, wenn man den vorhergehenden Werth von G_m in dem Integrale (f) substituirt:

$$\Delta\frac{1}{g_i} = \frac{V_i^2}{v_i}\left\{\begin{aligned} &\Delta\frac{1}{c_1} - L_i\,(X_1^2 + Y_1^{\prime 2}) \\ &- M_i\,Y_1^{\prime}\,\varphi_1 - N_i\,\varphi_1^2\,. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (h)$$

8) Zur Entwickelung von $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ ist es zuerst nöthig, die Gleichung (h) von Nro. 2 zu betrachten, nämlich

$$\frac{\mathfrak{f}_{\prime}}{\mathfrak{g}_{\prime}} = \frac{\mathfrak{g}}{n_{\prime}\,\mathfrak{c}_{\prime}}\cdot\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} - \frac{\mathfrak{g}}{n_{\prime}\,\mathfrak{c}_{\prime}}\,\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\,\frac{n_{\prime}\,\mathfrak{G}_{\prime}}{\mathfrak{k}_{\prime}}.$$

Mit Vernachlässigung der Größen der dritten Ordnung ist

$$\frac{\mathfrak{f}_{\prime}}{\mathfrak{g}_{\prime}} = \frac{f_{\prime}}{g_{\prime}} + \Delta\frac{f_{\prime}}{g_{\prime}},$$

$$\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}} = \frac{f}{g} + \Delta\frac{f}{g},$$

$$\frac{a}{c,} = 1 - \frac{d}{c,} = 1 - \frac{d}{c,} - d\Delta\frac{1}{c,} = \frac{g}{c,} - d\Delta\frac{1}{c,},$$

$$\frac{\mathfrak{g}}{n,\mathfrak{c},}\,\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{g}}\,\frac{n,\mathfrak{G},}{\mathfrak{k},} = \frac{g}{n,c,}\,\frac{f}{g}\,\frac{n,G,}{k,},$$

Substituirt man diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung, so gibt die Vergleichung der zur zweiten Ordnung gehörigen Gröſsen:

$$-\Delta\frac{f,}{g,} = \frac{-g}{n,c,}\,\Delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n,}\,\frac{f}{g}\,\Delta\frac{1}{c,} + \frac{g}{n,c,}\,\frac{f}{g}\,\frac{n,G,}{k,}\,. \quad \text{(a)}$$

Nach Nro. 7 ist aber

$$\Delta\frac{1}{c,} = \frac{g^2}{c_,^2}\,\Delta\frac{1}{g},$$

folglich

$$-\Delta\frac{f,}{g,} = \frac{-g}{n,c,}\,\Delta\frac{f}{g} + \frac{d}{n,}\,\frac{g^2}{c_,^2}\,\frac{f}{g}\,\Delta\frac{1}{g} + \frac{g}{n,c,}\,\frac{f}{g}\,\frac{n,G,}{k,}\,. \quad \text{(b)}$$

Die Gleichung (e) von Nro. 7 gibt

$$Y,\Delta\frac{1}{g,} = \frac{g^2}{n,c_,^2}\,Y,\Delta\frac{1}{g} + Y,G,.$$

Hieraus erhält man, wenn man in dem von $\Delta\frac{1}{g}$ abhängigen Gliede statt $Y,$ seinen Werth

$$Y, = \frac{c,}{g}\,Y - \frac{fd}{g}$$

substituirt, welcher aus den Formeln (a) von Nro. 4 folgt,

$$Y,\Delta\frac{1}{g,} = \frac{g}{n,c,}\,Y\Delta\frac{1}{g} - \frac{d}{n,}\,\frac{g^2}{c_,^2}\,\frac{f}{g}\,\Delta\frac{1}{g} + Y,G,.$$

Die Summe dieser Gleichung und der vorhergehenden (b), auf die i^{te} Fläche bezogen, ist

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_i = \frac{g_{i-1}}{n_i\,c_i}\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)_{i-1}$$

$$+ Y_i\,G_i + \frac{g_{i-1}}{n_i\,c_i}\left(\frac{f}{g}\right)_{i-1}\frac{n_i\,G_i}{k_i}\,. \quad \text{(c)}$$

Integrirt man diese endliche Differenzengleichung

nach der Formel (r) von Nro. 3, und bemerkt, daſs nach den Ausdrücken (i) von Nro. 2 und (g) von Nro. 4

$$\frac{g_0}{c_1}\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_0=\left(Y\Delta\frac{1}{c}-\Delta\frac{b}{c}\right)_1$$

$$=(Y'_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1,$$

$$[n_i]^i=v_i,$$

$$\left[\frac{g_{i-1}}{c_i}\right]^{i-1}=V_i$$

ist, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\\&=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(Y'_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\\&+\Sigma^i_{m\,1}\frac{v_m}{V_m}\left[Y_mG_m+\frac{g_{m-1}}{n_mc_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}\frac{n_mG_m}{k_m}\right]\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad\text{(d)}$$

Die Formeln von Nro. 4 geben aber

$$Y_m=\frac{1}{V_m}(Y'_1+K_m\varphi_1),$$

$$\frac{g_{m-1}}{n_mc_m}\left(\frac{f}{g}\right)_{m-1}=\frac{V_m\varphi_1}{v_m}.$$

Hierdurch wird das vorhergehende Integral

$$\left.\begin{aligned}&\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\\&=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{aligned}&(Y'_1+K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\\&+\Sigma^i_1\left[\frac{v_mG_m}{V^2_m}(Y'_1+K_m\varphi_1)+\frac{n_mG_m\varphi_1}{k_m}\right]\end{aligned}\right.\end{aligned}\right\}\quad\text{(e)}$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, statt $\frac{v_mG_m}{V^2_m}$ und $\frac{n_mG_m}{k_m}$ ihre Werthe zu substituiren. Vermöge der Formeln (a) von Nro. 7 ist aber

$$\frac{n_mA_m}{k_m}=\frac{B_m}{2}.$$

Mit Berücksichtigung dieses Werthes erhält man daher durch den Ausdruck (c) von Nro. 7:

$$\frac{v_m G_m}{V^2_m}(Y'_1 + K_m \varphi_1) = -\left(\frac{A v}{V^4}\right)_m (X_1^2 + Y'^2_1)\, Y'_1$$
$$-\left[\left(\frac{A v K}{V^4}\right)_m (X_1^2 + Y'^2_1) + \left(\frac{2 A v K}{V^4} + \frac{B}{V^2}\right)_m Y'^2_1\right]\varphi_1$$
$$-\left(\frac{3 A v K^2}{V^4} + \frac{2 B K}{V^2} + \frac{C}{v}\right)_m Y'_1 \varphi_1^2$$
$$-\left(\frac{A v K^3}{V^4} + \frac{B K^2}{V^2} + \frac{C K}{v}\right)_m \varphi_1^3,$$

$$\frac{n_m G_m}{k_m}\varphi_1 = -\left(\frac{B}{2 V^2}\right)_m (X_1^2 + Y'^2_1)\,\varphi_1$$
$$-\left(\frac{B K}{V^2} + \frac{n B}{k v}\right)_m Y'_1 \varphi_1^2$$
$$-\left(\frac{B K^2}{2 V^2} + \frac{n B K}{k v} + \frac{V^2 n C}{v^2 k}\right)_m \varphi_1^3.$$

Gebraucht man die Bezeichnungen (g) von Nro. 7, und setzt noch aufserdem

$$\left.\begin{aligned}
D_m &= \left(\frac{nB}{k} + C\right)_m \\
&= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m [(n+3)k - 2nh]_m \\
&= -\left(\frac{n-1}{2n}\right)_m \left[\frac{n+3}{a} - \frac{3(n+1)}{c}\right]_m, \\
E_m &= \left(\frac{nC}{k}\right)_m = -\left(\frac{n^2-1}{a}\right)_m, \\
O^{(m)} &= \left(\frac{3 A v K^2}{V^4} + \frac{3 B K}{V^2} + \frac{D}{v}\right)_m, \\
P^{(m)} &= \left(\frac{A v K^3}{V^4} + \frac{3 B K^2}{2 V^2} + \frac{D K}{v} + \frac{E V^2}{v^2}\right)_m,
\end{aligned}\right\} \quad \text{(f)}$$

so geben die vorhergehenden Ausdrücke

$$\frac{v_m G_m}{V^2_m}(Y'_1 + K_m \varphi_1) + \frac{n_m G_m \varphi_1}{k_m} =$$

$$= -L^{(m)}(X_1^2 + Y'^2_1)\, Y'_1 - M^{(m)} \frac{(X_1^2 + 3 Y'^2_1)}{2} \varphi_1$$
$$- O^{(m)} Y'_1 \varphi_1^2 - P^{(m)} \varphi_1^3.$$

Durch Substitution dieser Werthe und durch die Anwendung der in Nro. 7 eingeführten Bezeichnung bekommt das Integral (e) die Gestalt

$$\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)_i=\frac{V_i}{v_i}\left\{\begin{array}{l}(Y'_1+K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1}-\Delta\varphi_1\\ -L_i(X'^2_1+Y'^2_1)Y'_1\\ -M_i\frac{(X'^2_1+3Y'^2_1)}{2}\varphi_1\\ -O_iY'_1\varphi^2_1-P_i\varphi^3_1.\end{array}\right\}\quad (g)$$

9) Ich gehe endlich zur Entwickelung der dritten und vierten Formel (g) von Nro. 2. Diese Formeln entstehen aus denen (f) derselben Nummer, wenn man x, y und z mit $\mathfrak{X}_\prime$, $\mathfrak{Y}_\prime$ und $(\mathfrak{Z}_\prime-d)$ verwechselt, und da bei der Entwickelung

$$\mathfrak{X}_\prime=X_\prime+\Delta X_\prime,$$
$$\mathfrak{Y}_\prime=Y_\prime+\Delta Y_\prime,$$
$$\mathfrak{Z}_\prime=Z_\prime$$

gesetzt werden mufs, so hat man, um von den Formeln (f) zu den Formeln (g) überzugehen:

$$x=X_\prime+\Delta X_\prime,$$
$$y=Y_\prime+\Delta Y_\prime,$$
$$z=Z_\prime-d,$$
$$z-g=Z_\prime-(d-g)=Z_\prime-c_\prime.$$

Die Ausdrücke (a) von Nro. 6, welche die Entwickelungen der Formeln (f) von Nro. 2 sind, geben aber

$$y=Y-z\left[\left(\frac{Y-f}{g}\right)+\left(Y\Delta\frac{1}{g}-\Delta\frac{f}{g}\right)\right]$$
$$-\left(\frac{z-g}{g}\right)\left[\Delta Y+\left(\frac{Y-f}{g}\right)Z\right],$$
$$x=X-z\left[\frac{X}{g}+X\Delta\frac{1}{g}\right]$$
$$-\left(\frac{z-g}{g}\right)\left[\Delta X+\frac{XZ}{g}\right].$$

Substituirt man daher die vorhergehenden Werthe, vergleicht die Gröſsen der zweiten Ordnung und bezieht $\Delta Y_{,}$ und $\Delta X_{,}$ auf die i^{te} Fläche, so erhält man die folgenden Differenzengleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta Y_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}} \Delta Y_{i-1} + d_{i-1} \left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_{i-1} \\ &\quad + \left(\frac{Y-f}{g}\right)_{i-1} \left(\frac{c_i}{g_{i-1}} Z_{i-1} - Z_i\right), \\ \Delta X_i &= \frac{c_i}{g_{i-1}} \Delta X_{i-1} + d_{i-1} X_{i-1} \Delta \frac{1}{g_{i-1}} \\ &\quad + \frac{X_{i-1}}{g_{i-1}} \left(\frac{c_i}{g_{i-1}} Z_{i-1} - Z_i\right).\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Der Ausdruck (g) von Nro. 8, auf die $(i-1)^{te}$ Fläche bezogen, kann unter die Form gebracht werden:

$$\left(Y \Delta \frac{1}{g} - \Delta \frac{f}{g}\right)_{i-1} =$$

$$= \frac{V_{i-1}}{v_{i-1}} \left\{\begin{aligned}&(Y'_1 + K_1 \varphi_1) \Delta \frac{1}{c_1} - \Delta \varphi_1 \\ &- \Sigma_{\mu}^{(i-1)} \left\{\begin{aligned}&L^{(\mu)} (X_1^2 + Y_1'^2)\, Y'_1 \\ &+ M^{(\mu)} \left(\frac{X_1^2 + 3 Y_1'^2}{2}\right) \varphi_1 \\ &+ O^{(\mu)} Y'_1 \varphi_1^2 + P^{(\mu)} \varphi_1^3.\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

Durch diesen Werth erhält die erste Gleichung (a) dieselbe Gestalt wie die Gleichung (s) von Nro. 3, wenn man setzt:

$$p_{i-1} = \frac{c_i}{g_{i-1}},$$

$$r_{i-1} = \frac{V_{i-1}\, d_{i-1}}{v_{i-1}} \left[(Y'_1 + K_1 \varphi_1) \Delta \frac{1}{c_1} - \Delta \varphi_1\right]$$

$$+ \left(\frac{Y-f}{g}\right)_{i-1} \left(\frac{c_i}{g_{i-1}} Z_{i-1} - Z_i\right),$$

$$s_{i-1} = -\frac{V_{i-1}\, d_{i-1}}{v_{i-1}},$$

$$t_\mu = L^{(\mu)}(X_1 + Y_1'^2)\, Y_1' + M^{(\mu)}\,\frac{(X_1^2 + 3\, Y_1'^2)}{2}\,\varphi_1$$
$$+ O^{(\mu)}\, Y_1'\,\varphi_1^2 + P^{(\mu)}\,\varphi_1^3.$$

Integrirt man daher jene Gleichung nach der Formel (u) von Nro. 3, und bemerkt, daſs mit Berücksichtigung der in Nro. 4 gegebenen Werthe

$$[p_{i-1}]^{i-1} = \frac{1}{V_i},$$

$$\Delta Y_1 = \Delta(Y_1' + K_1\,\varphi_1),$$

$$\sum_{m\;1}^{(i-1)} \frac{V_m\, V_{m+1}\, d_m}{v_m} = \sum_{m\;2}^{i} \frac{V_{m-1}\, V_m\, d_{m-1}}{v_{m-1}} = -(K_i - K_1),$$

$$\sum_{1}^{(i-1)} \frac{r_m}{[p_m]^m} = -(K_i - K_1)\left[(Y_1' + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right]$$
$$+ \sum_{m\;1}^{(i-1)} V_{m+1}\left(\frac{Y-f}{g}\right)_m \left(\frac{c_{m+1}}{g_m}\, Z_m - Z_{m+1}\right),$$

$$\sum_m^{(i-1)} \frac{s_\mu}{[p_\mu]^\mu} = K_i - K_m$$

ist, so erhält man

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta(Y_1' + K_1\,\varphi_1) \\ -(K_i - K_1)\left[(Y_1' + K_1\,\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\ + \sum\limits_{m\;1}^{(i-1)} V_{m+1}\left(\frac{Y-f}{g}\right)_m\left(\frac{c_{m+1}}{g_m}\, Z_m - Z_{m+1}\right) \\ + \sum\limits_{m\;1}^{(i-1)} (K_i - K_m)\left\{\begin{array}{l} L^{(m)}(X_1^2 + Y_1'^2)\, Y_1' \\ + M^{(m)}\left(\frac{X_1^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\ + O^{(m)}\, Y_1'\,\varphi_1^2 + P^{(m)}\,\varphi_1^3 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Substituirt man statt Y_m und $\left(\frac{f}{g}\right)_m$ ihre Werthe aus Nro. 4, und bemerkt, dafs

$$V_{m+1} = \frac{V_m g_m}{c_{m+1}}$$

ist, so wird das von Z_m und Z_{m+1} abhängige Glied gleich

$$\frac{1}{V_i} \sum_m^{(i-1)} \left[Y'_1 + \left(K_m - \frac{V_m^2 g_m}{v_m}\right) \varphi_1 \right] \left(\frac{Z_m}{g_m} - \frac{Z_{m+1}}{c_{m+1}}\right).$$

Entwickelt man nun die angedeutete Summe, so ist jedes Z, mit Ausnahme des ersten und letzten, in zwei auf einander folgenden Gliedern enthalten, welche man vereinigen kann. Aufserdem geben die Formeln der angeführten Nummer

$$K_{m-1} = K_m + \frac{V_{m-1} V_m d_{m-1}}{v_{m-1}},$$

$$\frac{1}{g_m} - \frac{1}{c_m} = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)_m = \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m,$$

der vorhergehende Ausdruck verwandelt sich daher in den folgenden:

$$\frac{1}{V_i} \left\{ \begin{array}{l} Z_1 \left(\frac{Y'_1 + K_1 \varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right) - Z_i \left(\frac{Y'_1 + K_i \varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{v_i}\right) \\ + \sum_m^{(i-1)} Z_m \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m (Y'_1 + K_m \varphi_1) \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + \left(\frac{n-1}{v}\right)_m V_m^2 \varphi_1 \right] \end{array} \right.;$$

und man erhält endlich

$$\Delta Y_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l}
\Delta(Y'_1 + K_1\varphi_1) \\
-(K_i - K_1)\left[(Y'_1 + K_1\varphi_1)\,\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\
+Z_1\left(\frac{Y'_1 + K_1\varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right) \\
-Z_i\left(\frac{Y'_1 + K_i\varphi_1}{c_i} - \frac{n_i V_i^2\varphi_1}{\nu_i}\right) \\
+\Sigma_m^{(i-1)}\left\{\begin{array}{l}
Z_m\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m(Y'_1 + K_m\varphi_1) \right. \\
\qquad\qquad \left. + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_m V_m^2\varphi_1\right] \\
+(K_i - K_m)\left\{\begin{array}{l}
L^{(m)}(X_1^2 + Y_1'^2)\,Y'_1 \\
+M^{(m)}\left(\frac{X_1^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\
+O^{(m)}\,Y'_1\,\varphi_1^2 + P^{(m)}\,\varphi_1^3.
\end{array}\right.
\end{array}\right.
\end{array}\right\} \quad \text{(b)}$$

Die zweite Gleichung (a) entsteht aus der ersten, wenn man Y und $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ mit X und $X\Delta\frac{1}{g}$ verwechselt, und $\frac{f}{g} = o$ setzt.

Um die Veränderungen zu bewirken, welche hierdurch in dem vorhergehenden Ausdrucke von ΔY_i entstehen, mufs man die Glieder unter dem Zeichen Σ, welche mit $(K_i - K_m)$ multiplicirt sind und sich auf $\left(Y\Delta\frac{1}{g} - \Delta\frac{f}{g}\right)$ beziehen, mit den correspondirenden Gliedern von $X\Delta\frac{1}{g}$ verwechseln, welche nach Nro. 7 sind:

$$L^{(m)}(X_1^2 + Y_1'^2)\,X_1 + M^{(m)}\,X_1\,Y'_1\,\varphi_1 + N^{(m)}\,X_1\,\varphi_1^2.$$

In allen übrigen Gliedern dagegen mufs man Y'_1 mit X_1 verwechseln und $\varphi_1 = o$ setzen. Diefs gibt

$$\Delta X_i = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta X_1 - (K_i - K_1)\, X_1\, \Delta \frac{1}{c_1} \\ + \left(\frac{Z_1}{c_1} - \frac{Z_i}{c_i}\right) X_1 \\ + \Sigma_m^{(i-1)} \left\{\begin{array}{l} Z_m \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m\, X_1 \\ +(K_i - K_m) \left\{\begin{array}{l} L^{(m)}\, (X_1^2 + Y_1'^2)\, X_1 \\ + M^{(m)}\, X_1\, Y_1'\, \varphi_1 \\ + N^{(m)}\, X_1\, \varphi_1^2. \end{array}\right. \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \text{(c)}$$

Die vorhergehenden Werthe von ΔY_i und ΔX_i reichen hin, um den von ΔZ_i zu finden. In der That, wenn man die Gleichung (a) von Nro. 2 unter die Gestalt bringt

$$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2a},$$

und statt $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ ihre Werthe substituirt, nämlich

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= X + \Delta X, \\ \mathfrak{Y} &= Y + \Delta Y, \\ \mathfrak{Z} &= Z + \Delta Z = \frac{X^2 + Y^2}{2a} + \Delta Z, \end{aligned}$$

so entsteht daraus

$$\begin{aligned} \Delta Z &= \frac{Z^2 + 2X\Delta X + 2Y\Delta Y}{2a} \\ &= \frac{1}{2a}\left[\left(\frac{X^2 + Y^2}{2a}\right)^2 + 2X\Delta X + 2Y\Delta Y\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(d)} \end{aligned}$$

Auch geben die Werthe von ΔY_i und ΔX_i diejenigen der Grössen $\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]$ und $\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]$, welche in den Gleichungen des gebrochenen Strahles vorkommen, wenn man zu den ersteren die aus Nro. 4 genommenen Werthe von $\left(\frac{E-f}{g}\right) Z$ und $\frac{XZ}{g}$ addirt. Man hat

$$\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i = \frac{Z_i}{V_i}\left(\frac{Y_1' + K_i \varphi_1}{g_i} - \frac{V_i' \varphi_1}{\nu_i}\right).$$

Der Ausdruck (b) von ΔY_i enthält das Glied

$$\Delta Y_i = \ldots \frac{Z_i}{V_i}\left[-\left(\frac{Y'_1 + K_i\varphi_1}{c_i}\right) + \frac{n_i V_i^2 \varphi_1}{\nu_i}\right].$$

Diese beiden Glieder vereinigen sich, wenn man die Ausdrücke von ΔY_i und $\left(\frac{Y-f}{g}\right)_i Z_i$ zusammen addirt, und geben das correspondirende Glied von

$$\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i =$$
$$= \ldots \frac{Z_i}{V_i}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_i k_i(Y'_1 + K_i\varphi_1) + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_i V_i^2 \varphi_1\right],$$

welches unter das Zeichen Σ gesetzt werden kann. Hierdurch erhält man

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\Delta Y + \left(\frac{Y-f}{g}\right) Z\right]_i = \\
&= \frac{1}{V_i}\left\{\begin{aligned}
&\Delta(Y'_1 + K_1\varphi_1) \\
&- (K_i - K_1)\left[(Y'_1 + K_1\varphi_1)\Delta\frac{1}{c_1} - \Delta\varphi_1\right] \\
&+ Z_1\left(\frac{Y'_1 + K_1\varphi_1}{c_1} - \varphi_1\right) \\
&+ \sum_m^i Z_m\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m(Y'_1 + K_m\varphi_1)\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{n-1}{\nu}\right)_m V_m^2 \varphi_1\right] \\
&+ \sum_m{}_1^{(i-1)}(K_i - K_m)\left\{\begin{aligned}
&L^{(m)}(X_1^2 + Y_1'^2)Y'_1 \\
&+ M^{(m)}\left(\frac{X_1^2 + 3Y_1'^2}{2}\right)\varphi_1 \\
&+ O^{(m)} Y'_1 \varphi_1^2 + P^{(m)}\varphi_1^3.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

Durch die oben angegebenen Verwechselungen verwandelt sich dieser Ausdruck unmittelbar in den von $\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]$, und es entsteht daraus

$$\left[\Delta X + \frac{XZ}{g}\right]_i = \\ = \frac{1}{V_i}\left\{\begin{array}{l} \Delta X_1 - (K_i - K_1) X_1 \Delta \frac{1}{c_1} + \frac{Z_1 X_1}{c_1} \\ + \sum\nolimits_m^i{}_1 Z_m \left(\frac{n-1}{n}\right)_m k_m X_1 \\ + \sum\nolimits_m^{(i-1)}{}_1 (K_i - K_m) \left\{\begin{array}{l} L^{(m)} (X_1^2 + Y_1^2) X_1 \\ + M^{(m)} X_1 Y_1 \varphi_1 \\ + N^{(m)} X_1 \varphi_1^2 . \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad \text{(f)}$$

(Die Fortsetzung folgt.)

V.

Über die ebenen Curven, welche ihren Evoluten ähnlich sind;

von

A. v. Ettingshausen.

1.

Nachdem die groſsen Geometer *Huyghens*, *Tschirnhausen*, *Jakob Bernoulli* entdeckt hatten, daſs die gemeine Cykloide, die Epicykloiden und die logarithmischen Spirallinien durch Abwickelung ähnlicher Curven erzeugt werden, bot sich natürlicher Weise die Frage dar, ob diese Eigenschaft den genannten Curven ausschlieſsend zukomme, oder ob noch andere mit derselben Eigenschaft begabte krumme Linien möglich seyen.

Bereits vor einem Jahrhundert hat *Kraft* im zweiten Bande der ältern Petersburger Commentarien die Beantwortung dieser Frage versucht. Er gelangt daselbst zu dem Resultate, daſs nur die logarithmischen

Spirallinien durch Abwickelung ähnlicher und in übereinstimmender Lage erscheinender Curven entstehen können, und daſs die Ähnlichkeit bei derjenigen Spirale, deren charakteristischer Winkel *) die Hälfte eines Rechten ist, in Gleichheit übergehe; daſs ferner nur die Cykloide eine mit ihr identische und in umgekehrter Stellung befindliche Evolute zulasse, so wie nur die Epicykloiden bloſs ähnliche und verkehrt liegende Evoluten besitzen.

Im zwölften Bande derselben Commentarien hat sodann *Euler* das umfassendere Problem betrachtet, für eine Reihe von Curven, deren jede folgende die Evolute der vorhergehenden ist, die erste Curve dergestalt zu bestimmen, daſs sie einer beliebigen der folgenden, oder, mit andern Worten, ihrer Evolute von beliebiger Ordnung ähnlich wird. Er bestätigt da, in Betreff der Ähnlichkeit der Curven mit ihren Evoluten erster Ordnung, *Kraft's* Sätze. In einem lange Zeit nachher geschriebenen Aufsatze *(Nova Acta Acad. Petrop. T. I.)* hat *Euler* dieses Problem wieder vorgenommen, und die zur Auflösung desselben dienende Analyse mehr entwickelt, wobei die Ausdrücke »directe« und »verkehrte Ähnlichkeit« in einem anderen Sinne gebraucht werden, als es in dem früheren Aufsatze geschehen ist. An den früher gefundenen Resultaten wurde jedoch, der Hauptsache nach, nichts abgeändert.

Indessen haben die genannten Mathematiker die Aufgabe, von der hier die Rede ist, nicht in gröſstmöglichster Allgemeinheit behandelt, sondern wenigstens, was die Curven betrifft, die ihren Evoluten in überein-

*) So nenne ich hier, der Kürze wegen, den unveränderlichen Winkel, unter welchem die Tangenten einer logarithmischen Spirale gegen die vom Pole zu den Berührungspuncten gezogenen Geraden geneigt sind.

stimmender Lage ähnlich seyn sollen, eine kleine Nachlese übrig gelassen, welche den Gegenstand des gegenwärtigen Aufsatzes ausmacht. Beide Geometer binden sich nämlich an die keineswegs nöthige Beschränkung, daſs die Puncte der abgewickelten und durch Abwickelung erzeugten Curve, welche rücksichtlich der Ähnlichkeit dieser Curven einander homolog sind, auch rücksichtlich der Abwickelung zusammen gehören. In der That stimmt die von mehreren neuern Schriftstellern gemachte Bemerkung, daſs nicht bloſs jene logarithmische Spirale, deren charakteristischer Winkel die Hälfte eines Rechten beträgt, sondern überhaupt jede andere logarithmische Spirale mit ihrer Evolute identisch ist, mit *Kraft's* und *Euler's* Sätzen nicht überein. Es verlohnt sich daher der Mühe, die noch vorhandene Lücke anszufüllen, und in gehöriger Allgemeinheit zu untersuchen, welche Curven ihren Evoluten ähnlich sind. Der vorliegende Aufsatz hat hiebei zunächst zwar nur die unmittelbaren Evoluten im Auge; am Schlusse desselben soll aber auch der Weg zur allgemeinen Auflösung des von *Euler* betrachteten Problems angedeutet werden.

2.

Es bezeichne r den zu dem Endpuncte des Bogens s einer ebenen Curve gehörenden Krümmungshalbmesser, und ω einen der zwei Nebenwinkel, welche r mit einer in der Ebene der Curve angenommenen fixen Geraden bildet; so ist, wenn man ω so wählt, daſs dieser Winkel an dem in das Auge gefaſsten Curvenaste mit dem Bogen s zugleich wächst, bekanntlich

$$r = \frac{ds}{d\omega}.$$

Stellen r_1, s_1, ω_1 mit den so eben genannten gleich-

namige, einer zweiten Curve entsprechende Gröfsen vor, wobei zur Bestimmung des Winkels ω_1 eine eigene fixe Gerade dienen mag, so hat man in demselben Sinne

$$r = \frac{d s_1}{d\omega_1}.$$

Ist nun die zweite Curve die Evolute der ersten, und gehören die Endpuncte der Bogen s, s_1 in Bezug auf die Evolution zusammen, d. h. liegt der Endpunct des Bogens s in der zur zweiten Curve durch den Endpunct des Bogens s_1 geführten Tangente, so kann man, bei schicklicher Wahl des Anfangspunctes des Bogens s_1, $ds_1 = dr$ setzen, woraus, der Natur der Abwickelung gemäfs, bei schicklicher Wahl des Anfangspunctes des Bogens s, $d\omega_1 = d\omega$ folgt, so dafs die Gleichung

$$r_1 = \frac{dr}{d\omega}$$

besteht.

Es sey überdiefs die zweite Curve der ersten ähnlich, und der dem Winkel ω' entsprechende Endpunct des Bogens s' in der ersten Curve dem Endpuncte des Bogens s_1 in der zweiten homolog, so ergibt sich aus dem Begriffe der Ähnlichkeit, dafs wenn

$$d\omega' = \pm\, d\omega_1 = \pm\, d\omega$$

gesetzt wird, wobei die oberen oder die unteren Zeichen zu nehmen sind, je nachdem man auf der ersten Curve nach einerlei oder nach entgegengesetzten Richtungen fortschreiten mufs, um das eine Mal die Folge von Puncten zu treffen, welche in Hinsicht auf die Ähnlichkeit, und das andere Mal die Folge von Puncten, welche in Hinsicht auf die Abwickelung einer gegebenen Folge von Puncten auf der zweiten Curve correspondiren, d. h. je nachdem beide Curven einander direct oder verkehrt ähnlich erscheinen, die Gleichung

$$\pm \frac{d s_1}{d s'} = k$$

Statt findet, in welcher k eine unveränderliche positive Zahl vorstellt, deren Verhältnifs zur Einheit das Verhältnifs ausdrückt, in welchem die Dimensionen der zweiten Curve zu den homologen Dimensionen der ersten stehen.

Da der dem Endpuncte des Bogens s_1 zugehörige Krümmungshalbmesser $r' = \frac{d s'}{d \omega'}$ ist, so ergibt sich mit Rücksicht auf die gemachten Voraussetzungen, $r_1 = k r'$, also

$$\frac{d r}{d \omega} = k r'.$$

Offenbar kann r als eine Function des Winkels ω, deren Form von der Beschaffenheit der ersten Curve abhängt, betrachtet, also $r = F(\omega)$ und daher auch $r' = F(\omega')$ gesetzt werden. Nun ist, wegen $d\omega' = \pm\, d\omega$, nothwendig $\omega' = a \pm \omega$, wobei a eine beständige Gröfse bedeutet, daher $r' = F(a \pm \omega)$; man hat es also dem zu Folge, zur Bestimmung der Function $F(\omega)$, von welcher die Ausmittelung der ihren Evoluten ähnlichen Curven abhängt, mit der Gleichung

$$\frac{d F(\omega)}{d \omega} = k F(a \pm \omega)$$

zu thun, welche Gleichung, wie man sieht, in folgende zwei

$$\frac{d F(\omega)}{d \omega} = k F(a + \omega) \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{d F(\omega)}{d \omega} = k F(a - \omega) \quad \ldots \quad (2)$$

zerfällt, deren erste auf die directe, und die zweite auf die verkehrte Ähnlichkeit beider Curven sich bezieht.

3.

Die Gleichung (2), mit deren Betrachtung hier der Anfang gemacht werden soll, läſst sich auf eine lineare Differenzialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Differenzirt man nämlich diese Gleichung, so erhält man

$$\frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} = k \frac{dF(a-\omega)}{d\omega}.$$

Setzt man andererseits in der Gleichung (2) $a-\omega$ an die Stelle von ω, so wird

$$\frac{dF(a-\omega)}{d\omega} = -kF(\omega),$$

mithin ergibt sich

$$\frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} + k^2 F(\omega) = 0.$$

Das allgemeinste Integral dieser Differenzialgleichung läſst sich unter der Form

$$F(\omega) = A \,.\, \sin.(k\omega + B)$$

darstellen, worin A und B die beiden willkürlichen Constanten sind. Führt man dieses Ergebniſs in die Gleichung (2) ein, so erhält man zur Bestimmung von B die Gleichung

$$\sin.(k(a-\omega) + B) = \cos.(k\omega + B),$$

welcher man hinreichend Genüge leistet, wenn man

$$k(a-\omega) + B = \frac{\pi}{2} - (k\omega + B),$$

$$\text{d. h.}\quad B = \frac{\pi}{4} - \frac{ka}{2}$$

setzt, wobei π die allgemein angenommene Bedeutung hat.

Es ist demnach

$$F(\omega) = A \,.\, \sin.\left(k\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{ka}{2}\right)$$

die vollständige Auflösung der Gleichung (2), worin A unbestimmt bleibt.

Um die Natur der durch diese Auflösung angezeigten Curve auf dem kürzesten Wege zu erkennen, bedenke man, daſs wegen $r = F(\omega)$ und $s = \int F(\omega)\, d\omega$

$$r = A \sin.\left(k\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{ka}{2}\right)$$

$$\text{und} \quad s = C - \frac{A}{k} \cos.\left(k\omega + \frac{\pi}{4} - \frac{ka}{2}\right)$$

wird, wobei C eine neue Constante vorstellt, deren Werth von der Position des Anfangspunctes des Bogens s abhängt. Man hat also

$$r^2 + k^2(s - C)^2 = A^2.$$

Diese Relation zwischen jedem Bogen der zu suchenden Curve und dem zugehörigen Krümmungshalbmesser ist bekanntlich, wenn k von der Einheit verschieden angenommen wird, je nachdem man $k < 1$ oder $k > 1$ seyn läſst, ein ausschlieſsendes Eigenthum der Epi- und Hypo-Cykloiden, und dieselbe gehört für $k = 1$, in welchem Falle die Ähnlichkeit der Curve mit ihrer Evolute in Congruenz übergeht, der gemeinen Cykloide an. Übrigens lassen sich die Gleichungen dieser Curven in gewöhnlicher Form mit Hülfe des obigen Resultates für $F(\omega)$ sehr leicht herstellen, wenn man berücksichtiget, daſs für rechtwinklige Coordinaten x und y des dem Winkel ω zugehörigen Punctes der Curve, in so fern der fixe Schenkel dieses Winkels als Axe der x dient,

$$dx = F(\omega) \sin.\omega\, d\omega$$

$$\text{und} \quad dy = F(\omega) \cos.\omega\, d\omega \quad \text{ist.}$$

Es ist also *Kraft's* Behauptung, daſs bloſs die Epicykloiden ähnliche und die Cykloide eine mit ihr selbst identische und verkehrt liegende Evolute besitzt, vollkommen richtig.

4.

Die Gleichung (1), nämlich

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(\omega + a),$$

zeigt einen verschiedenen Charakter, je nachdem $a = 0$, oder a von der Nulle verschieden ist. Da aber der zweite Fall den ersten in sich enthält, so soll vor der Hand von der besonderen Annahme $a = 0$ abgesehen werden. Im Allgemeinen ist die Gleichung (1). sowohl als Differenzialgleichung, wie auch als Differenzengleichung zu betrachten, in welcher letzteren Beziehung a als Differenz der Variablen ω erscheint. Eine Gleichung dieser Art vertritt die Stelle eines Systems von Differenzialgleichungen zwischen einer Reihe veränderlicher Gröſsen und der denselben zu Grunde liegenden Variablen, und drückt das gemeinschaftliche Bildungsgesetz dieser Differenzialgleichungen aus. Die Auflösung einer solchen Gleichung läſst sich also durch die Integration eines Systems zugleich bestehender Differenzialgleichungen bewerkstelligen. Im vorliegenden Falle sind diese Differenzialgleichungen linear und von der ersten Ordnung; die Auflösung jeder derselben wird also durch eine Summe von Gröſsen von der Form $Ae^{B\omega}$, deren jede einzelne der ins Auge gefaſsten Differenzialgleichung Genüge leistet, und gewissen besonderen Werthen der von ω nicht abhängenden Gröſsen A und B entspricht, verrichtet. Da die Anzahl der erwähnten Differenzialgleichungen unbeschränkt ist (denn die Reihe der Functionen von ω, deren Verbindung mit ω durch diese Gleichungen vor Augen gelegt wird, nämlich

$$\ldots\ldots F(\omega - 2a), F(\omega - a), F(\omega), F(\omega + a), F(\omega + 2a), \ldots\ldots$$

ist keiner Beschränkung unterworfen), so wird auch die Anzahl der Glieder, aus welchen ihre Auflösung zusam-

mengesetzt werden kann, unbegrenzt bleiben. Um die Beschaffenheit der Constanten A, B zu erkennen, setze man in der Gleichung (1) $A e^{B\omega}$ an die Stelle von $F(\omega)$, so fällt A aus der Gleichung hinweg und wird demnach unbestimmt gelassen; B hingegen erscheint an die Gleichung

$$B = k e^{Ba} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

gebunden, in so fern nämlich die fixe Constante e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist.

Die Gleichung (3) bietet, da die Zahl k ihrer Bedeutung zu Folge positiv ist, wenn man überdieſs die Potenz e^{Ba} in keinem andern Sinne nimmt, als welchen die Formel

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \, . \, 2} + \frac{x^3}{1 \, . \, 2 \, . \, 3} + \ldots$$

angibt, keinen reellen negativen Werth für B dar. Ist a negativ, so gestattet die Gleichung (3) einen reellen positiven Werth für B; ist a positiv, so läſst diese Gleichung in Bezug auf B entweder keine, oder zwei gleiche, oder zwei ungleiche reelle positive Auflösungen zu, je nachdem $ka > \frac{1}{e}$ oder $ka = \frac{1}{e}$ oder $ka < \frac{1}{e}$ ist. In allen diesen Fällen gibt es noch unzählige Paare correspondirender imaginärer Werthe für B. Nur, wenn $a = 0$ gesetzt wird, ist bloſs ein Werth für B, nämlich $B = k$, möglich.

Setzt man, um reelle und imaginäre Werthe von B zugleich betrachten zu können,

$$B = p + q\sqrt{-1},$$

wobei p und q reelle Gröſsen, die Nulle mit eingeschlossen, vorstellen, so geht die Gleichung (3) in das System der zwei Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p &= k e^{ap} \cos. aq, \\ q &= k e^{ap} \sin. aq, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

oder, wenn man lieber will, in die Gleichungen

$$\sqrt{\left(\frac{k\,e^{ap}}{p}\right)^2 - 1} = \text{tang.}\left[a\sqrt{\left(\frac{k\,e^{ap}}{p}\right)^2 - 1}\right],$$

$$q = \sqrt{k^2\,e^{2\,a\,p} - p^2}$$

über, deren reelle Auflösungen für p und q zu nehmen sind.

Die allgemeinste Auflösung der Gleichung (1) wird somit durch den Ausdruck

$$F(\omega) = \Sigma A\,e^{p\,\omega}(\cos.\,q\,\omega + \sqrt{-1}\,\sin.\,q\,\omega)$$

dargestellt, worin das Zeichen Σ anzeigt, daſs die Summe einer beliebigen Menge von Gliedern zu nehmen sey, welche aus der Form $A\,e^{p\,\omega}\,(\cos.\,q\,\omega + \sqrt{-1}\,\sin.\,q\,\omega)$ für eben so viele, den Gleichungen (4) Genüge leistende Werthe von p und q und für gänzlich willkürliche Werthe von A hervorgehen.

Nimmt man in obiger Summe je zwei Theile, welche sich, nebst der Verschiedenheit von A, nur in dem Zeichen des Radikals $\sqrt{-1}$ unterscheiden, zusammen, und stellt man, was offenbar erlaubt ist, die diesen Theilen zugehörigen Werthe der Constanten A durch $\frac{1}{2}A(\cos.\,\alpha + \sqrt{-1}\,\sin.\,\alpha)$ und $\frac{1}{2}A(\cos.\,\alpha - \sqrt{-1}\,\sin.\,\alpha)$ vor, so erhält der für $F(\omega)$ gefundene Ausdruck die Form

$$F(\omega) = \Sigma A\,e^{p\,\omega}\,\cos.\,(q\,\omega + \alpha),$$

wobei es hinreicht, die Summe Σ bloſs auf die positiven der den Gleichungen (4) Genüge leistenden Werthe von q zu beziehen, und A, α gänzlich unbestimmt bleiben. In so ferne zur Auflösung der vorliegenden Aufgabe $F(\omega)$ als die Gröſse des dem Winkel ω entsprechenden Krümmungshalbmessers der zu suchenden Curve, welche ihrer Evolute direct ähnlich seyn soll, erscheint, können A, α bloſs reelle Werthe erhalten.

5.

Die Natur der Curven, welche ihren Evoluten direct ähnlich sind, wird durch die Gleichung

$$r = \Sigma A e^{p\omega} \cos.(q\omega + \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

hinreichend an den Tag gelegt. Es sind Spirallinien, welche nach der einen Richtung fortgesetzt sich ihrem Pole in unzähligen Windungen unendlich annähern, ohne denselben jemals zu erreichen. Wie der Ausdruck

$$s = \int F(\omega)\, d\omega$$
$$= C + \Sigma \frac{A e^{p\omega} (p \cos.(q\omega + \alpha) + q \sin.(q\omega + \alpha))}{p^2 + q^2},$$

worin C eine Constante bedeutet, lehrt, hat die Länge des von irgend einem Puncte der Curve gegen den Pol hin ohne Ende verfolgten Bogens eine bestimmte endliche Gröſse zur Grenze. Die rechtwinkeligen Coordinaten x, y des dem Winkel ω zugehörigen Punctes der Curve werden, in so ferne die Axe der x die Richtung des fixen Schenkels des Winkels ω hat, durch diesen Winkel mittelst der Formeln

$$x = \int F(\omega) \sin.\omega\, d\omega,$$
$$y = \int F(\omega) \cos.\omega\, d\omega$$

ausgedrückt, deren weitere Entwickelung keiner Schwierigkeit unterliegt.

Läſst man in den Gleichungen (4) $k = 1$ seyn, so erhält man mittelst der unter dieser Voraussetzung sich ergebenden Werthe von p und q die Curven, welche mit ihren Evoluten identisch sind, und in ähnlicher Lage erscheinen. Wie aus dem Resultate der obigen Analyse erhellet, gibt es unendlich viele Curven dieser Art, so daſs *Kraft* und *Euler* es nur mit einem einzigen der unzähligen möglichen Fälle zu thun hatten.

Dieser Fall ist gerade derjenige, dessen Betrachtung hier einstweilen bei Seite gesetzt wurde, jener

nämlich, für welchen a in die Nulle übergeht. Dadurch staltet sich die Gleichung (1) in eine gemeine Differenzialgleichung

$$\frac{dF(\omega)}{d\omega} = kF(\omega)$$

um, aus welcher durch Integration

$$F(\omega) = Ae^{k\omega}$$

folgt, wobei A die unbestimmte Constante ist. Dasselbe Resultat erhält man auch aus (5), weil für $a = o$ die Gröſsen p und q bloſs die Werthe $p = k$ und $q = o$ anzunehmen vermögen, also die Summe Σ bloſs ein Glied darbietet. Da hierbei $s = C + \frac{A}{k} e^{k\omega}$ wird, so hat man

$$r = k(s - C),$$

welche Gleichung einer logarithmischen Spirale gehört, deren charakteristischer Winkel der Cotangente k entspricht. Für $k = 1$, den Fall der Gleichheit der Curve und ihrer Evolute, ist dieser Winkel die Hälfte eines Rechten. Daſs übrigens für $a = o$ die homologen Puncte beider Curven sowohl in Bezug auf die Ähnlichkeit, wie auch in Bezug auf die Evolution die nämlichen sind, fällt in die Augen.

Allein auch wenn a nicht verschwindet, jedoch in algebraischer Bedeutung, d. h. mit Rücksicht auf sein Zeichen, nicht gröſser als $\frac{1}{ke}$ ist, erhält man aus den Formeln (5) die logarithmische Spirallinie, wenn man, was unter dieser Voraussetzung angeht, $q = o$ nimmt und die Summe Σ, falls p zweier verschiedener Werthe fähig seyn sollte, auf eines der dafür sich darbietenden Glieder beschränkt. Der hierbei gebrauchte Werth von p ist die Cotangente des charakteristischen Winkels der logarithmischen Spirale. Ist hingegen p gegeben, so findet man den dazu gehörigen Werth von a durch die

Formel

$$a = \frac{1}{p} l \frac{p}{k},$$

in welcher l als Zeichen der natürlichen Logarithmen dient. Für $k = 1$ ergibt sich $a = \frac{1}{p} l p$. Zugleich sieht man hieraus, daſs jede logarithmische Spirale ihrer Evolute gleich ist, wie oben gesagt wurde.

6.

Es seyen nun

$$s, s_1, s_2, s_3, \ldots s_{n-1}, s_n$$

Bögen einer Folge ebener Curven;

$$r, r_1, r_2, r_3, \ldots r_{n-1}, r_n$$

seyen die den Endpuncten dieser Bögen zugehörigen Krümmungshalbmesser, und

$$\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots \omega_{n-1}, \omega_n$$

die Winkel, welche die Richtungen dieser Krümmungshalbmesser mit fixen geraden Linien bilden, deren jede einer der Curven zugeordnet ist, so bestehen die Gleichungen

$$r_1 = \frac{d s_1}{d \omega_1}, \quad r_2 = \frac{d s_2}{d \omega_2}, \quad r_3 = \frac{d s_3}{d \omega_3}, \ldots r_n = \frac{d s_n}{d \omega_n}.$$

Ist jede der Curven die Evolute der nächst vorhergehenden, und gehören die Endpuncte der Bogen s, $s_1, s_2, \ldots s_n$ in Hinsicht auf die Abwickelung zusammen; setzt man ferner

$$d\omega_1 = d\omega_2 = d\omega_3 = \ldots = d\omega_n = d\omega,$$

so wird

$$ds_1 = \pm dr, \quad ds_2 = \pm dr_1, \quad ds_3 = \pm dr_2, \ldots$$
$$ds_n = \pm dr_{n-1},$$

mithin, wenn man $d\omega$ als constant betrachtet,

$$r_1 = \pm \frac{dr}{d\omega}, \quad r_2 = \pm \frac{d^2 r}{d\omega^2}, \quad r_3 = \pm \frac{d^3 r}{d\omega^3}; \ldots$$
$$r_n = \pm \frac{d^n r}{d\omega^n}.$$

Läſst man die erste und letzte dieser Curven einander ähnlich seyn, und zwar die homologen Dimensionen beider im constanten Verhältnisse $1:k$ stehen; setzt man ferner, wie in 2.,

$$r = F(\omega),$$

so ergibt sich, mit Hülfe der dort angestellten Betrachtung, zur Bestimmung der Function $F(\omega)$, die Gleichung

$$\pm \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = kF(a \pm \omega), \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

worin a eine beständige Gröſse vorstellt. In derselben gilt linker Hand des Gleichheitszeichens das obere Zeichen, wenn der Krümmungshalbmesser r_n mit ω zugleich wächst, und das untere, wenn eine dieser Gröſsen wächst, während die andere abnimmt; auf der rechten Seite der Gleichung hingegen bezieht sich das obere Zeichen auf die directe, und das untere auf die verkehrte Ähnlichkeit beider Curven.

Ist n eine ungerade Zahl, so kann man durch Änderung des Sinnes, in welchem man den Winkel ω zählt. das Zeichen vor dem Differenzialquotienten $\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$ in das entgegengesetzte verwandeln, mithin der Gleichung (6) eine solche Form geben, daſs ihre linke Seite positiv erscheint; dieſs geht aber nicht an, wenn n gerade ist, in welchem Falle diese Gleichung verschiedene Curven darbietet, je nachdem man den erwähnten Differenzialquotienten mit dem einen oder mit dem anderen Zeichen setzt. Betrachtet man k als eine Zahl, die sowohl positiv als negativ seyn kann, so läſst sich das Doppelzeichen auf der linken Seite der Gleichung (6) unter-

drücken, und diese Gleichung nimmt die Gestalt

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = k F(a \pm \omega)$$

an.

Was die Gleichung

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = k F(a - \omega)$$

betrifft, so folgt aus ihr, durch $n$maliges Differenziren

$$\frac{d^{2n} F(\omega)}{d\omega^{2n}} = k \frac{d^n F(a - \omega)}{d\omega^n}.$$

Dieselbe Gleichung gibt aber durch Vertauschung von ω mit $a - \omega$

$$\frac{d^n F(a - \omega)}{d\omega^n} = (-1)^n k F(\omega),$$

daher ist

$$\frac{d^{2n} F(\omega)}{d\omega^{2n}} = (-1)^n k^2 F(\omega).$$

Diese Gleichung, deren Integration übrigens keiner Schwierigkeit unterliegt, ist ein besonderer Fall der Gleichung

$$\frac{d^{2n} F(\omega)}{d\omega^{2n}} = K F(a + \omega)$$

für $a = 0$; woraus folgt, dafs Curven, welche ihren Evoluten n^{ter} Ordnung verkehrt ähnlich sind, direct ähnliche Evoluten $2n^{\text{ter}}$ Ordnung besitzen, so zwar, dafs die der Ähnlichkeit gemäfs homologen Puncte der Hauptcurve und der letztgenannten Evolute auch in Bezug auf die Abwickelung zusammen gehören.

Man hat es daher im Grunde nur mit der Gleichung

$$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = k F(a + \omega)$$

für beide Zeichen der Constanten k zu thun. Aus den in 4. angeführten Gründen wird die allgemeine Auflösung derselben durch die Formel

$$F(\omega) = \Sigma A e^{B\omega}$$

ausgedrückt, worin das Summenzeichen Σ auf beliebig viele Paare der Werthe von A und B sich bezieht, deren erstere gänzlich willkürlich sind, letztere aber der Gleichung

$$B^n = k e^{B a}$$

Genüge leisten müssen.

Setzt man

$$B = \rho (\cos.\theta + \sqrt{-1} \sin.\theta),$$

so hat man zur Bestimmnng von ρ und θ die Gleichungen

$$\rho^n \cos. n\theta = k e^{a\rho \cos.\theta} \cos.(a\rho \sin.\theta),$$
$$\rho^n \sin. n\theta = k e^{a\rho \cos.\theta} \sin.(a\rho \sin.\theta).$$

Der obige Ausdruck für $F(\omega)$ verwandelt sich hierdurch in

$$F(\omega) = \Sigma A e^{p\omega} \cos.(q\omega + \alpha),$$

wobei

$$p = \rho \cos.\theta \quad \text{und} \quad q = \rho \sin.\theta$$

ist, und A, α willkürliche Constanten bedeuten. Es steht also der vollständigen Bestimmung der verlangten Curve nichts mehr im Wege.

VI.
Über die Härte der Krystalle;

vom
Prof. *M. L. Frankenheim* in Breslau.

(Fortsetzung.)

---

17) An Krystallflächen, wo die Blätterdurchgänge weder rechtwinkelig geneigt noch gleichartig sind, fand ich Härteverhältnisse, wie sie sich aus dem Früheren vermuthen ließsen. Hier folgen Beispiele hierüber

Wenn man am Gyps den leichtesten Blätterdurchgang ins Auge faſst, so ist von den zwei auf die Seiten senkrechten und gegen einander fast durchgehends unter 113° geneigten Blätterdurchgängen die Theilungsfläche des leichteren meist gestreift, die des anderen minder leichten etwas muschelig. An beiden sind aber, wie schon früher gesagt, die auf dem leichtesten Blätterdurchgange senkrechten Richtungen viel weicher als die dazu parallelen. An der glänzendsten Fläche sind die auf dem leichtern Seitenblätterdurchgang senkrechten Richtungen am weichsten, aber die dem dritten Blätterdurchgang parallelen nur wenig härter. Die gröſste Härte herrscht in der Richtung, welche dem zweiten Blätterdurchgang fast parallel ist; nach der auf dem dritten senkrechten Richtung ist sie nur etwas geringer, so daſs die Richtungen der gröſsten und kleinsten Härte etwas ungewiſs, und die ganze Härte weniger regelmäſsig ist.

An den Prismen des salpeters. Kali ist der schwächere Blätterdurchgang den Flächen des Prisma, der stärkere dem abgestutzten spitzen Winkel parallel, und an allen Flächen der verticalen Zone ist in horizontaler

Richtung die Härte am geringsten. Dasselbe findet an den Prismen des chromsauren und phosphorsauren Bleies und des Borax Statt. Unter allen Körpern, die ich untersuchte, ist es der Cyanit allein, der an der Fläche des stärksten Blätterdurchganges nach den der Fläche des zweiten Blätterdurchganges parallelen Richtungen weicher ist als in der darauf senkrechten. Doch darüber mehr, wenn von der Natur der Blätterdurchgänge die Rede seyn wird.

An den Flächen des Mangan-Peroxydes, und zwar in der Richtung des leichtesten Blätterdurchgangs, welcher zur abgestutzten scharfen Kante des Prisma parallel ist, findet sich die gröſste Härte in horizontaler Richtung. Am schwefels. Natron mit transversalen Blätterdurchgängen findet sich die Härte am gröſsten parallel zum leichtesten longitudinalen Blätterdurchgange, an den Flächen des leichtesten Blätterdurchgangs aber sind die darauf senkrechten, d. i. die dem zweiten Blätterdurchgang parallelen Richtungen die härteren.

18) Ähnliches fand ich an einer groſsen Zahl minder regelmäſsiger Krystalle, so daſs es nicht zu bezweifeln ist, es seyen Härte und Blätterdurchgang von derselben Kraft abhängig. Die Richtungen der gröſsten und kleinsten Härte lassen sich aus der Lage der Blätterdurchgänge hinreichend genau bestimmen. Je mehr sich die Blätterdurchgänge an Deutlichkeit von einander scheiden, und unter je weniger schiefen Winkel sie gegen einander und gegen die zu prüfende Fläche geneigt sind, desto genauer werden die Richtungen der gröſsten und kleinsten Härte bestimmt. Unter je schieferem Winkel aber der Blätterdurchgang gegen die zu prüfende Fläche geneigt ist, desto weniger eignet er sich zur Bestimmung der Härte, und seine Wirkung, nach dem Kräftenparallelogramme zertheilt, scheint der zweier

Blätterdurchgänge zu gleichen, wovon der eine zur Fläche parallel, der andere darauf senkrecht ist.

19) Dieſs über den Härteunterschied an einer und derselben Fläche. Nun wollen wir zum andern Theile der Untersuchung übergehen, d. i. zu den Härteverhältnissen an verschiedenen Flächen desselben Krystalls. Alle Flächen, welche die Krystallographen für homolog annehmen, haben gleiche Härte, was nicht allein die Theorie lehrt, sondern auch die Erfahrung bestätiget; aber die Unterschiede sind an verschiedenen Flächen am gröſsten, und zwar gröſser als an derselben Fläche in verschiedenen Richtungen. Es ist aber auch die Beobachtung schwieriger, weil durch die Einwirkung der Luft und des atmosphärischen Wassers nicht allein der Grad der Härte, sondern auch ihr Verhältniſs so geändert wird, daſs einige Flächen zuweilen härter ausfallen, obwohl sie im natürlichen Zustande weicher als die andern sind. Und dieſs findet man nicht bloſs bei Salzen, welche wir an der Luft zerflieſsen und anschiessen sehen, sondern auch an solchen Körpern, von welchen man glaubte, daſs sie an der Luft gar keine Änderung erleiden, wie z. B. beim kohlensauren Kalk, beim Anhydrit, ja sogar beim Baryt wird die Härte der Oberfläche bedeutend geändert. Viele Beispiele davon findet man auch in Mineraliensammlungen, Häufig werden Krystalle gefunden, bei welchen von verschiedenen Flächen jene, welche z. B. den Flächen des schiefen Prisma parallel sind, viel mehr oder weniger verwittert sind, als die Abstumpfungsflächen der Kanten oder die Endflächen. Auch bezweifle ich nicht, daſs diese Unterschiede, genauer untersucht, gewisse Gesetze enthüllen dürften; doch hat sich damit so wie mit vielem anderen zur Erkenntniſs der Erscheinungen an Krystallen vielfach Geeignetem noch Niemand befaſst.

20) Ich habe einige Versuche über die Kraft angestellt, durch welche die Oberflächen mit Hülfe schwacher Säuren oder Salzauflösungen angegriffen werden, und häufig sah ich dabei einige Flächen in Kurzem ihren Glanz verlieren, andere ihn länger beibehalten, die Kanten oder Flächen bald concav bald convex werden, und wenn der Krystall aufgelöst ward, einige Winkel ihre Schärfe beibehalten oder vermehren, andere hingegen in Kurzem sich abrunden. Da sich dabei immer dieselben Resultate ergeben, so kann kein anderer Grund vorhanden seyn, als ein Unterschied im Zusammenhange und der Härte, und es wäre der Mühe werth, zu untersuchen, in welchem Verhältnisse die chemische Wirkung zum Zusammenhange der Krystalle stehe. Die Versuche, welche *Daniell* an Krystallen und einigen Metallen angestellt und beschrieben hat (*Quarterly Journal of Science, London, Vol. I* u. *II.*, oder *Annales de Chimie et de Physique, II.* 287, u. *IV.* 33), obwohl merkwürdig, sind doch von anderer Art als jene, von welchen hier die Rede ist; denn es wurde von *Daniell* nicht die Einwirkung der Flüssigkeiten auf einzelne Krystallflächen, sondern auf zusammengesetzte Krystalle untersucht.

Einzelne Zusammensetzungsstücke von Krystallen hängen nicht nur mit geringerer Kraft zusammen als die Theile eines einfachen Krystalls, sondern sie bieten auch der auflösenden Flüssigkeit mehrere Zwischenräume dar, in welche sie leicht eindringen kann, so dafs die Krystalle nicht nur durch Auflösung der Theile, mittelst denen sie zusammenhängen, sondern auch, indem das Auflösungsmittel mit Gewalt in die feinsten Zwischenräume dringt, und wie ein Keil durch Capillaritätswirkung die feinsten Blätterdurchgänge trennt, in einzelne Krystalle zerfällt werden. Daher zerfallen

auch aus Körnern oder Fäden zusammengesetzte Körper mit Hülfe der Flüssigkeiten, obwohl sie nicht aufgelöst werden, dennoch in Körner und Fäden, sie mögen entweder unregelmäfsig oder nach dem Combinations- oder nach jenem Gesetze verbunden seyn, dafs alle kleinen fädenförmigen oder gekörnten Krystalle einen gröfseren Krystall bilden, wovon allein mir viele Beispiele vorkamen. Niemals sah ich einen Krystall von gleichförmigem Gefüge anders vernichtet werden, als durch eine von den Theilen der Oberfläche nach Innen zuschreitende Auflösung.

21) Doch darauf werde ich vielleicht bei einer andern Gelegenheit zurückkommen; jetzt will ich zu jenen Versuchen zurückkehren, bei denen es nöthig war, blofs jene Flächen zu vergleichen, welche ich erst vor Kurzem entblöfste, und damit die Flächen, an welchen sich kein Blätterdurchgang findet, nicht gänzlich übergangen würden, auch jene beobachten, deren Glanz weder eine äufsere Kraft noch eine anhaltende Netzung verändert, die auch keine grofse Härteveränderung zeigten, oder an denen die Härteunterschiede gröfser waren, als sie vom Einflusse der atmosphärischen Luft herrühren könnten.

Wenn man die Härte verschiedener Flächen vergleicht, so darf man die Unterschiede an derselben Fläche ja nicht vernachlässigen; sie sind oft so grofs, dafs die gröfste Härte an der weichern Fläche von der geringsten an der härtern übertroffen wird, wie diefs beim kohlensauren Kalk der Fall ist, wo die gröfste Härte der dem deutlichsten Blätterdurchgange parallelen Flächen doch geringer ist, als die kleinste der Flächen des sechsseitigen Prisma. Dieses erfährt man leicht mittelst einer Messingnadel; denn während diese die

Flächen des Blätterdurchgangs leicht ritzt, greift sie die Flächen des Prisma fast gar nicht an.

22) An den Flächen des deutlichsten Blätterdurchganges des Anhydrites ist die kleinste Härte viel geringer als an den übrigen Flächen. Dasselbe beobachtete ich auch an andern Körpern, und je gröſser der Unterschied in der gehörigen Lage der krystallographischen Flächen und der Neigung der Winkel war, desto grössere Unterschiede fanden sich vor. Daher sind sie am Gyps so groſs, und noch gröſser am Sphen und Cyanit. Am Gyps läſst sich die Fläche des deutlichsten Blätterdurchgangs, auf welche die weichsten Linien der Seitenflächen senkrecht stehen, viel leichter ritzen als die andern Flächen, sie mögen einen leichten Blätterdurchgang haben oder nicht. Am Labrador und andern Krystallen aus der Ordnung »Feldspath« sind die Flächen mit zwei ausgezeichneten Blätterdurchgängen weicher als die andern. Am Sphen sind die Flächen des unsymmetrischen Prisma's viel weniger hart als die glänzendsten Flächen der symmetrischen Prismen. Endlich findet sich am Cyanit nur ein Unterschied, der sich fast allem Härtemaſse entzieht. Hierbei kann man auch sehen, was für Härteunterschiede aus den unbedeutendsten Änderungen der Oberfläche entstehen.

23) Bei allen den genannten und vielen andern beobachteten Körpern steht die mittlere Härte der Fläche im verkehrten Verhältnisse zu ihrer Theilbarkeit; oder, um die Gesetze der Härte unabhängig von dem unklaren und schwankenden Begriffe der Theilbarkeit darzustellen: In jeder Krystallfläche sind jene Linien die härtesten, die den Perpendikeln auf die härtesten Flächen am nächsten liegen, jene die schwächsten, die sich den Perpendikeln auf die schwächeren Flächen nähern, und umgekehrt; so daſs auf diese Art die mittlere Härte der

Flächen mit der Richtung der gröſsten und kleinsten Härte auf denselben in Verbindung steht. Wodurch aber nicht gesagt seyn will, daſs die Richtungen der gröſsten und kleinsten Härte der Flächen und jene der Linien immer unter sich genau senkrecht seyn müssen.

24) Kleinere Unterschiede konnten zwar auf dem eingeschlagenen Wege schwer ausgemittelt werden, indeſs zeigten doch bei Krystallen des tessularischen Systems und Theilbarkeit nach den Kanten des Oktaëders die Hexaëderflächen eine gröſsere Härte, als die des Oktaëders, wie z. B. beim oktaëdrischen Fluſshaloid.

An Körpern mit Theilbarkeit in Richtung der Hexaëderflächen gelang es mir nicht, die Oktaëderflächen zu beobachten; doch auch bei diesen sind wahrscheinlich die Oktaëderflächen die weicheren. Einige Physiker, die auch unter den Körpern des Tessularsystems isomorphe Stoffe antreffen wollen, haben, bewogen durch die groſse Analogie des Natrums mit Kali und Kalk, diese Stoffe für isomorph gehalten, und auſser einigen wenigen unsichern Beispielen, die sie aus dem Geschlecht der Feld- und Kuphonspathe genommen haben, führten sie vorzüglich den fluſssauren Kalk (oktaëdr. Fluſsspath) und das Natrium-Chlorid (hexaëdr. Steinsalz) für sich an. Allein sie werden durch das oben Angeführte hinreichend widerlegt; sollen schon Krystalle des Tessularsystems isomorph seyn, so müssen sie doch wenigstens Ähnlichkeit (denselben Combinations- und Theilbarkeits-Charakter) besitzen. Leider konnten die auf diesen Punct bezüglichen Untersuchungen weder in der gehörigen Anzahl noch mit der nöthigen Sorgfalt angestellt werden, denn auf chemischem Wege erzeugte Krystalle sind allzu sehr den Angriffen der Luft ausgesetzt, und von natürlichen Krystallen sind nur wenige zu so zarten Versuchen geeignet, da sie nach verschie-

denen Richtungen leicht brechbar und dennoch die Flächen von frischem Anbruche seyn und öfteren Prüfungen unterzogen werden müssen. Von derlei Krystallen war ich daher nicht im Stande, viele Exemplare zu erhalten, und oft durfte ich das nicht genauer untersuchen, was sich mir als beobachtungswerth aufgedrängt hatte.

25) Auch das Krystallsystem von Körpern, die in der Natur mit unvollkommener Flächenbildung erscheinen, ließe sich durch Beachtung der Härteunterschiede entdecken. So könnte man auch an dem kleinsten Stückchen Gyps (Euklashaloid) mit undeutlichem Blätterdurchgange in der Richtung der Seitenkanten, durch einige wenige mittelst einer Feder oder Nadel gezogene Linien die Lage der Blätterdurchgänge und das Krystallsystem bestimmen, falls es nicht auf anderen Wegen bereits bekannt wäre. Dasselbe kann auch bei Körpern von noch nicht ausgemitteltem Krystallsysteme mit Erfolg angewendet werden; so scheinen alle Talkglimmer, die ich beobachten konnte, zum rhomboëdrischen Systeme zu gehören, da gar kein Härteunterschied an ihnen zu bemerken war. Jedoch hätte es zur Bestätigung dieser Meinung noch einer optischen Probe bedurft, wozu leider die Exemplare nicht geeignet waren.

Auf jeden Fall verdienen wenigstens die mit der Verschiedenheit der Richtungen wechselnden Härtegrade unter die Charakteristik der Mineralogie und ihre naturhistorischen Merkmale aufgenommen zu werden.

Von dem Begriffe der Härte.

26) In dem bisher Auseinandergesetzten haben wir die Härte in der gewöhnlichen Bedeutung dieses Wortes als die Stärke der Kraft aufgefaſst, mit der ein Körper den in sein Inneres eindringenden oder seine Theile

zu verschieben suchenden Substanzen widersteht, und wir nannten unter zwei Körpern jenen den härtern, welcher den andern ritzt, ohne von ihm geritzt zu werden. Allein ein Körper kann von einem, den man sonst für weniger hart hält, dennoch geritzt werden, z. B. wenn dieser schärfere Kanten hat oder mit bedeutender Geschwindigkeit über ihn hingeführt wird. Wir wollen daher das nicht von der Härte allein, sondern, wie wir sehen, auch von der Gestalt und der Bewegung abhängende Vermögen zu ritzen einstweilen ganz unberücksichtiget lassen, und jene Eigenschaft, die wir Härte nennen, von den Gesetzen der Cohäsion ausgehend auf einem andern Wege bestimmen lernen.

27) Das allgemeine Problem der Physik, aus der Menge der Thatsachen die einfachsten und auf die geringste Zahl gebrachten Gesetze abzuleiten, ist hinsichtlich der Thatsachen der Cohäsion noch nicht gelöset worden; es scheint daher nicht überflüssig, die Gesetze der Cohäsion, wie sie sich aus den unzähligen seit *Coulomb* bis auf *Lagerhjelm* angestellten Versuchen zu ergeben scheinen, in der Kürze aufzustellen.

28) Die Worte, deren wir zur Bezeichnung der Cohäsionsverschiedenheiten und Grade uns bedienen, wie streckbar, gebrechlich, spröde, zäh, hart, weich, mehr oder minder elastisch und cohärent, sind alle schwankend und unsicher, wiewohl sie alle Beziehung auf die beiden Hauptmomente aller Cohäsion haben, auf *Grad und Grenze der Elasticität.*

Unter *Elasticität* versteht man das Vermögen der Körper, Rauminhalt oder Dichte zu ändern. Bloſs wenn die Dichte durch irgend eine äuſsere Kraft vermehrt oder verringert wird, tritt dieſs Vermögen in Wirksamkeit. Es sucht den Körper in seine vorige Lage zurück zu führen, und falls keine äuſsere Kraft entgegen steht.

beginnt der Körper nach den bekannten Schwingungsgesetzen zu vibriren, wofern nur die erlittene Formänderung gewisse Grenzen nicht übersteigt. Aber bei anhaltender Wirksamkeit der äufseren Kräfte nimmt der Körper nach einigen Schwingungen eine neue Lage des Gleichgewichts an, in der neue, aus der Dichteänderung entstandene Kräfte die von aufsen einwirkenden aufheben, ihnen folglich der Gröfse nach gleich sind. Aus diesem letzten Umstande begreift man, wie man auf dem Erfahrungswege die Kraft bestimmen könne, die einer bestimmten Dichteänderung entspricht.

29) Am leichtesten läfst sich das Verhältnifs zwischen dem Drucke und der Dichte bei einem homogenen und von allen Seiten gleich stark comprimirten Körper, wie z. B. bei Gasen oder Flüssigkeiten, bestimmen. Bei festen Körpern aber, wo man sich darauf beschränken mufste, Drähte und Stäbe auszudehnen oder zu krümmen, wobei stets einige Theile mehr, andere weniger ausgedehnt, andere im Gegentheile zusammengedrückt werden, ist jenes Verhältnifs verwickelter. Doch hat die neueste Zeit und insbesondere *Poisson* auch dieses Verhältnifs dem Calcul zu unterwerfen gelehrt, und jenes alte Gesetz *Hook's* bestätiget gefunden, dafs innerhalb den Grenzen der vollkommenen Elasticität die Spannung (Dichteänderung) der spannenden Kraft proportionirt sey. Wenn wir daher die Volumen- oder Formänderung, das anfängliche Volumen als Einheit zu Grunde legend, mit dem Worte *Spannung*, die Gröfse der spannenden Kraft mit dem Worte *Reaction* bezeichnen, so ist die Elasticität gleich der Reaction getheilt durch die Spannung.

30) Man mifst daher die Stärke der Elasticität entweder durch das Gewicht, durch welches ein Stab von bestimmtem Querschnitte um eine gewisse Gröfse aus-

gedehnt wird, oder durch den von *Young* eingeführten Modulus der Elasticität, wiewohl es der Gleichförmigkeit wegen vorzuziehen wäre, sich bei festen Körpern desselben Maſsstabes wie bei flüssigen zu bedienen, nämlich die Gröſse der allseitigen (cubischen) Dichteänderung, die durch den Druck einer Atmosphäre hervorgebracht wird. Wendet man diesen Maſsstab wirklich an, so findet man mittelst Anwendung der *Poisson*'schen Formeln die Elasticität der festen Körper um nicht viel kleiner als die der Flüssigkeiten, wie wenigstens letztere durch *Oerstedt's*, *Sturm's* und *Colladon's* Versuche bestimmt worden ist. Liegt daher der Unterschied fester und flüssiger Körper, wie beinahe Alle glauben, in der verschiedenen Stärke der Cohäsion, so kann diese in der Elasticität ihren Grund nicht haben.

31) In festen, allenthalben gleich stark comprimirten Körpern gibt es keine *Grenzen* der Elasticität, mit dem Aufhören des Druckes tritt auch die vorige Gestalt wieder ein. Das Senkblei geht aus der gröſsten Meerestiefe, wo es doch einen ungeheuern Druck erleidet, unverändert an Gestalt und specifischem Gewichte hervor. Doch anders verhält sich die Sache bei Stäben oder Drähten, die durch Gewichte gespannt, gekrümmt, zusammengedrückt werden; wenn da die Spannung eine gewisse Grenze überschreitet, so bleibt auch nach Wegnahme des Gewichts die Gestalt geändert. *Dieſs ist die Grenze der Elasticität*, und das gröſste Gewicht, das sie erlangen kann, ohne dadurch eine bleibende Änderung zu erleiden, wollen wir die *Grenze der Reaction*, so wie die demselben entsprechende Spannung die *Grenze der Spannung* nennen.

32) Zwischen der Stärke und zwischen der Grenze der Elasticität waltet derselbe Unterschied ob, wie zwischen den Charakteren der Species, und den Eigenthüm-

lichkeiten, die ein Individuum derselben (eine Varietät) von dem andern trennen. Die Stärke der Elasticität ist, gleich einem Artscharakter, der ganzen naturhistorischen Species, z. B. allen Eisenvarietäten eigenthümlich, während die Grenzen der Elasticität die verschiedensten, z. B. eine andere beim Schmiede-, eine andere beim Guſs-, eine verschiedene beim langsam oder beim schnell erkalteten Eisen sind, so daſs die Grenzen der Elasticität bei Körpern derselben Art oft weiter aus einander liegen, als wie bei verschiedenartigen, jedoch auf gleiche Weise zugerichteten und behandelten.

33) Wird ein Körper einer die Grenze der Reaction überschreitenden Kraft ausgesetzt, so zerbricht er entweder, oder die Theile desselben ändern ohne Bruch ihren Platz, und hievon hängt die Brech- und Streckbarkeit der Körper ab; von was für einer Vertheilung der kleinsten Theilchen, um sich des gewöhnlichen Ausdrucks zu bedienen, der Unterschied zwischen dehnbaren und brechbaren Körpern abhänge, bleibt jedoch einem andern Orte vorbehalten. So viel ist indeſs theoretisch gewiſs, daſs wenn die Cohäsion eines durch ein Gewicht bleibend verlängerten Körpers trotz der Formänderung unverändert bleibt, dasselbe Gewicht, welches die Cohäsion zu überwinden und die bleibende Verlängerung hervorzurufen vermochte, in dieser seiner Wirksamkeit sogar mit beschleunigter Kraft fortfahren werde. Denn dieselbe Kraft, die einen Stab von z. B. einem Quadratzoll im Querschnitte zn verlängern und zugleich zu schmälern vermochte, wird doch gewiſs auch auf den schon z. B. bis auf einen halben Quadratzoll im Querschnitt reducirten dieselbe Wirkung äuſsern, u. s. f. Der Körper wird daher, ausgenommen in seiner Reduction auf einen unendlich kleinen Querschnitt, nie gebrochen, sondern nur ausgedehnt werden. Und

wirklich verhalten sich viele in hohem Grade streckbare Körper auf diese Art. Glas, Wachs, einige Metalle und vielleicht die meisten Körper in einer bestimmten (dem Schmelzpuncte nahen) Temperatur sind so streckbar, dafs man sie bis auf die dünnsten Fäden ziehen kann, ohne dafs sie je brechen würden, falls nicht wegen Veränderung des Wärmezustandes die Dehnbarkeit sich verlieren möchte. Allein in einer andern Temperatur scheint die Erfahrung, wenigstens bei den meisten Körpern, obiges Raisonnement zu widerlegen, und nach *Tredgold*, *Lagerhjelm* u. A. ist die brechende Kraft oft 3—4 Mal gröfser als die Grenze der Reaction.

34) Dieser Widerspruch zwischen Theorie und Erfahrung löst sich aber, wenn man bedenkt, dafs der Stab im natürlichen Zustande nicht dieselben Eigenschaften wie in dem durch das Gewicht veränderten besitzt. Denn durch die erlittene Verlängerung erweitern sich die Grenzen der Reaction, und zugleich tritt bei Überschreitung dieser erweiterten Grenze keine weitere Verlängerung, sondern ein Bruch des Körpers ein. Je näher der ursprüngliche Zustand des Stabes der Brechbarkeit ist, desto näher steht er dem Maximum der Reaction und dem wirklichen Bruche, im Zustande der Brechbarkeit selbst erreicht die Reaction ihren gröfstmöglichsten Werth, und ist dem brechenden Gewichte selber gleich.

35) Dieses Gewicht, reducirt auf einen bestimmten (bei allen Körpern von gleicher Gröfse angenommenen) Querschnitt, nennen wir *Cohärenz.* Die Cohärenz kann daher nur an den brechbaren Theilen eines Körpers beobachtet werden, seyen sie nun von Natur aus, oder durch Einwirkung des Gewichtes brechbar geworden, und hätten auch die an andern Orten befindlichen Körpertheile nichts von ihrer Streckbarkeit verloren. Dar-

aus erklären sich nun die gedachten Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung, da nämlich das Maximum der Reaction sowohl an streckbaren als brechbaren, das brechende Gewicht aber *nur an brechbaren* Körpern beobachtet werden kann. Daraus folgt auch, dafs alle Eisenvarietäten von was immer für einer Streckbarkeit in Bezug auf den Querschnitt des Bruchs dieselbe, jedoch in Bezug auf den ursprünglichen Querschnitt eine desto geringere Cohärenz besitzen, je mehr der Körper durch Einwirkung des Gewichtes verlängert, und je kleiner daher der Querschnitt wird.

Das Gesagte wird durch die so genauen Versuche *Lagerhjelm's* beinahe durchgängig (die wenigen Ausnahmen erklären sich leicht durch die Feinheit der Versuche und die grofse Ungleichheit der Varietäten) bestätiget, und jene zwei Gesetze über die Cohärenz und deren Verhältnifs der Verlängerung der Stäbe in der Nähe des Bruchs (die *Lagerhjelm* aufgestellt hat S. 165 u. s. w. der deutschen Übersetzung) sind in dem hier Auseinandergesetzten ihrem wesentlichen Inhalte nach ganz enthalten.

36) Schon oben wurde gesagt, dafs Körper derselben Species durch die verschiedenen Grenzen der Elasticität sich von einander unterscheiden, ja dafs man sie in eine Reihe stellen könnte, die von dem Zustande der Brechbarkeit ununterbrochen in den der Streckbarkeit fortlaufen würde; allein das Verhältnifs der äufsersten Glieder dieser Reihe zu einander ist äufserst mannigfach. Viele meinen, dafs jene Körper die gröfste Streckbarkeit erlangen, die äufserst langsam erkalteten und beim Übergange vom flüssigen oder weichen Zustande in den festen den Wirkungen der Theilchen auf einander frei gehorchen könnten. Nach dieser Ansicht sollten also die Krystalle die streckbarsten Körper seyn;

allein im Gegentheile sind die Krystalle der meisten nicht metallinischen Körper so brechbar, daſs sie ohne Gefahr eines Bruches gar nicht über die Grenzen der Elasticität ausgedehnt werden können. Und viele Metalle in der Form von Stäben, Platten oder Drähten beobachtet, können, wenn sie auch vom Maximum der Dehnbarkeit weit entfernt sind, nicht gebrochen werden, ohne vorher eine bedeutende Verlängerung und Zusammenziehung erlitten zu haben. Es haben daher die Varietäten der Metalle rücksichtlich der Grade der Dehnbarkeit einen weitern Spielraum, als die anderer Körper, und wir sehen hieraus, daſs in naturhistorischer Beziehung nicht bloſs Stärke und Grenze, sondern auch die *Veränderlichkeit* der Elasticität innerhalb einer Species genaue Berücksichtigung verdiene.

(Der Beschluſs folgt.)

VII.

Übersicht der meteorologischen Beobachtungen in Wien im Jahre 1830.

(Das Barometer befand sich in den Monaten Jänner, Februar, März 119.7 Fuſs, in den übrigen Monaten 101.7 Fuſs über dem mittleren Spiegel der Donau.)

Barometerstand in P. Z. bei 0° *R.* in jedem Monate.

1830.	Mittlerer.	Höchster.	Tiefster.	Mittlere monatliche Variation.
Jänner	27.657	28.070	27.037	1.033
Februar . . .	27.591	28.032	27.063	0.969
März	27.679	28.159	27.398	0.761
April	27.507	27.793	27.019	0.774
Mai	27.465	27.802	26.982	0.820
Juni	27.439	27.884	27.121	0.763
Juli	27.573	27.795	27.148	0.647
August	27.488	27.692	27.287	0.405
September .	27.456	27.859	27.048	0.811
October . . .	27.737	28.033	27.172	0.861
November . .	27.621	27.820	27.314	0.506
December . .	27.318	27.776	26.764	1.012
Jährlicher Durchschnitt	27.536	28.159	26.764	0.780

Mittlerer Barometerstand nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1 8 3 0.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittag.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner	27.700	27.647	27.130
Februar	27.605	27.585	27.521
März	27.357	27.661	27.707
April	27.457	27.427	27.444
Mai	27.477	27.447	27.470
Juni	27.463	27.417	27.433
Juli	27.584	27.562	27.570
August	27.457	27.478	27.484
September . . .	27.463	27.453	27.452
October	27.737	27.737	27.737
November . . .	27 625	27.617	27.622
December . . .	27.310	27.305	27.338
Jährlicher Durchschnitt . . .	27.568	27.528	27.538

Barometerstand bei verschiedenen Winden.

Windesrichtung.	Barometerstand.	Anzahl der Beobachtungen, aus denen das Mittel entsprang.
S.	27.522	58
SSO.	27.332	25
SO.	27.516	200
OSO.	27.575	58
O.	27.501	22
ONO.	27.668	2
NO.	27.590	26
NNO.	27.567	9
N.	27.581	49
NNW.	27.674	30
NW.	27.646	164
WNW.	27.551	253
W.	27.432	142
WSW.	27.465	19
SW.	27.517	24
SSW.	27.546	12

Temperatur der Luft nach *Réaumur.*

1 8 3 0.	Mittlere.	Gröfste.	Kleinste.	Mittlere jährliche Variation.
Jänner . .	— 6°.53	2°.0	—17°.0	19°.0
Februar . .	— 2°.60	9°.5	—15°.0	24°.5
März . . .	3°.41	15°.0	— 5°.5	20°.5
April . . .	9°.60	18°.0	1°.0	17°.0
Mai . . .	12°.92	22°.5	6°.0	16°.5
Juni . . .	16°.05	23°.9	8°.0	15°.9
Juli . . .	17°.16	26°.5	10°.0	16°.5
August . .	16°.73	28°.0	10°.0	18°.0
September .	11°.44	19°.0	6°.0	13°.0
October . .	6°.83	14°.9	2°.0	12°.9
November .	4°.43	12°.5	— 1°.0	13°.5
December .	1°.25	9°.0	— 5°.0	14°.0
Jährl. Durchschnitt . .	7°.58	28°.0	—17°.0	16°.78

Temperatur nach den verschiedenen Beobachtungsstunden.

1 8 3 0.	Um 8 Uhr früh.	Um 3 Uhr Nachmittag.	Um 10 Uhr Abends.
Jänner . . .	— 4°.32	— 5°.08	— 6°.87
Februar . . .	— 3°.97	0°.98	— 2°.94
März	2°.37	5°.51	2°.20
April	8°.83	12°.92	8°.08
Mai	11°.84	16°.44	10°.79
Juni	15°.02	19°.16	13°.98
Juli	15°.45	20°.03	15°.90
August . . .	15°.19	16°.44	15°.45
September . .	10°.36	13°.83	10°.12
October . . .	5°.11	9°.42	5°.97
November . .	3°.87	6°.31	3°.11
December . .	1°.13	2°.76	0°.67
Jährlich. Durchschnitt . .	6°.74	9°.86	6°.29

Beschaffenheit der Atmosphäre.

1830.	Heiter.	Wolken mit Sonnensch.	Trüb.	Nebel.	Regen.	Schnee.	Gewitter.	Herrschender Wind.
Jänner . .	3	12	16	7	—	5	—	SO.
Februar .	1	15	12	1	3	5	—	NW.
März . .	5	22	4	2	7	1	1	NW.
April . .	1	25	4	5	10	1	2	W.
Mai . . .	5	22	4	1	8	—	1	W.
Juni . . .	6	23	1	—	9	—	4	SO.
Juli . . .	9	20	2	1	11	—	3	WNW.
August . .	5	22	4	2	12	—	4	WNW.
September	—	19	11	7	12	—	1	W.
October .	2	23	6	8	10	—	—	WNW.
November .	—	16	14	11	5	4	—	SO.
December .	—	12	19	11	6	5	—	SO.
Jährl. Durchschnitt .	37	231	97	56	93	21	16	SO. u. WNW.

VIII.

Ein Nordlicht, gesehen in Wien.

Am 7. Jänner Abends sah man in Wien ein Nordlicht von besonderer Gröfse und Entwicklung. Es wurde an der hiesigen Universitätssternwarte beobachtet, und zeigte sich in seinen bemerkenswerthesten Verhältnissen den daselbst befindlichen Beobachtern, wie folgt: Eine Viertelstunde vor 7 Uhr Abends wurde der Horizont gegen Norden ungemein hell, und erschien von zusehends wachsender Beleuchtung. Gegen 7 Uhr war die anfänglich weifse Farbe des Himmels an dieser Stelle in eine gelblichte oder rothgelbe übergegangen, und die lichte Stelle selbst erschien in Form eines Kreisabschnittes, dessen mit dem Horizont parallele Sehne etwa 30°

umfassen mochte, und der 10° — 12° über den Horizont hinaufreichte. Um 8 Uhr hatte dieser Abschnitt seine gröfste Ausdehnung erlangt, der unterste Theil desselben erstreckte sich auf 90°, seine gröfste Höhe betrug 30°, und wich vom Meridian gegen Ost ab, dabei war er aber am wenigsten scharf begrenzt. Zu diesem lichten Abschnitte, der das Phänomen fortwährend mit verschiedenen Graden der Entwicklung begleitete, gesellten sich cylindrische oder conische Lichtstrahlen, die gleichsam aus jenem hervorschossen, bald länger, bald kürzer waren, bald schneller, bald langsamer und mit verschiedenen Graden der Lichtstärke auf einander folgten. An der Grenze erschienen sie besonders beweglich, und nahmen gleichsam eine geschlängelte Form und eine wirbelnde Bewegung an. Alle diese Säulen rückten allmählich von Nord gegen Ost fort, und gewährten das schönste Phänomen, als ihre östliche Bewegung am gröfsten war. Vorzüglich traten da drei Säulen hervor, die in Bögen gröfster, auf dem Horizont nahe senkrechter Kreise zu liegen schienen, unten 5° bis 6° einnahmen, und wovon der nördlichste und gröfste 60° Höhe hatte.

Anfangs erschienen diese Säulen weifsgelb mit veränderlicher Lichtintensität, wurden aber später mehr dunkelgelb und schwächer, und löseten sich endlich in eine schlecht begrenzte Lichtmasse auf, aus der sich etwa eine Minute später eine anfänglich matte, röthliche, kleine Wolke bildete, die sich schnell vergrösserte, und zur Zeit ihrer gröfsten Ausdehnung mit ungemein hellem rothen Lichte glänzte. So wie diese Wolke an Beleuchtung zunahm, wurde der untere Theil der Säulen matter, und verschwand endlich eine halbe Stunde nach der Entstehung der Wolke völlig. Bald darauf traf auch die Wolke dasselbe Loos, und es blieb

nur jenes Segment übrig, womit das ganze Schauspiel begonnen hatte. Um 11 Uhr sah man nur mehr diesen Rest des Nordlichtes, und gegen Mitternacht war alles verschwunden.

IX.

Neue und verbesserte physikalische Apparate.

1. Eine sehr empfindliche Wage. Von *Ritchie.*

(Phil. transact. 1830. *P. I., p.* 215.*)*

Ritchie hat mehrere Versuche über die Elasticität von Glasfäden angestellt, und die Resultate derselben auf physikalische Apparate angewendet. Eine dieser Anwendungen wurde auf einen Torsions-Multiplicator gemacht, der im Wesentlichen in Deutschland längst nichts Neues mehr ist, indem ihn schon *Ohm* bei seinen electrischen Versuchen (*Schweigg.* Journ., Bd. 46) anwendete, nur bringt *Ritchie* statt eines Goldlahnes einen feinen Glasfaden an. Anders verhält es sich mit einer auf der Elasticität dünner Glasfäden beruhenden, sehr empfindlichen Wage. Diese ist in Fig. 14 abgebildet; *g* ist ein Glasfaden, dessen Feinheit und Länge sich nach der Empfindlichkeit der Wage richtet. Es ist gut deren mehrere von verschiedener Länge und Dicke in Bereitschaft zu haben, um die Wahl nach dem jedesmaligen Bedürfnisse treffen zu können. *Ritchie* brauchte solche Fäden von 10 F. Länge, da war aber ihre Empfindlichkeit so grofs, dafs sie durch ein Gewicht von 1 Gran eine Torsion von 5000° erlitten. Es ist gut, wenn dieser Glasfaden an beiden Enden in eine dickere Masse übergeht, wie dieses auch leicht seyn kann, indem man

ihn am besten durch Ausziehen einer dünnen Thermometerröhre erhält. Dieser Faden wird nun mit einem Ende an einen Stift *a* befestiget, welcher durch den Mittelpunct einer verticalen, kreisrunden, in Grade abgetheilten Scheibe *c* geht, und mit einem Zeiger versehen ist. Mittelst dieses Stiftes wird der Zeiger und mit demselben zugleich auch der Glasfaden gedreht. Das andere Ende des Fadens ist an ein stählernes, unten mit einer Schneide versehenes Stäbchen *k* befestiget, das gleichsam den Wellzapfen abgibt. Senkrecht auf diesem Stäbchen ist ein hölzerner, sehr leichter, gleicharmiger, etwa 12 — 15 Z. langer, mit Wagschalen versehener Hebel *b* angebracht, der die Schneide des Stäbchens zur Axe hat. Als Unterlage dienen zwei Glasröhrchen *t*, die auf einer verticalen, oben in zwei Zinken wie eine Gabel sich zertheilenden Stütze festgemacht sind. Es ist gesagt worden, daſs an ein Ende des Stahlstäbchens der Glasfaden befestiget ist, an das andere schlieſst sich ein ungezwirnter Seidenfaden an, der selbst wieder mit seinem zweiten Ende sich an eine metallene Spiralfeder *s* anschlieſst, welche in einer zweiten verticalen Stütze ihre Befestigung findet, und nur dazu dient, durch ihre Elasticität den Glasfaden sammt Zugehör gespannt zu erhalten. Die Verbindung aller Theile mit dem Wagebalken *b* soll so beschaffen seyn, daſs letzterer in horizontaler Lage im Gleichgewichte steht, wenn der Glasfaden keine Windung hat, welches man daraus erkennt, daſs der Zeiger über der Scheibe *c* auf den Nullpunct weiset. Es ist gut, wenn sich wenigstens der Wagebalken in einem Glaskasten befindet, damit der Luftzug nicht auf ihn wirken kann. Der Glasfaden mag immerhin auſserhalb dieses Kastens bleiben.

Nun zum Gebrauche dieser Wage. Beträgt das zu bestimmende Gewicht gegen 1 Gr., so verfahre man so:

Man gebe dem Glasfaden durch Drehen des Stäbchens *a* eine Windung von 2 — 3 Peripherien, vorausgesetzt, dafs er dieselbe verträgt, ohne zu zerreissen (nach *Ritchie's* Versuchen kann ein nur 12 Z. langer Faden eine Torsion von 100 Peripherien ohne Bruch aushalten), lege dann auf die durch die Torsion gehobene Schale so viel Gegengewicht, bis der Balken nahe horizontal und der Zeiger bei *c* auf 0° steht; gebe hierauf die Last auf die beim Aufdrehen des Fadens steigende Schale, und winde den Draht mittelst des Griffes *a* so weit, bis diese Schale zu steigen beginnt, beobachte genau den Punct der Scale, auf welchem der Zeiger im Gleichgewichte bleibt, und bemerke die Torsion in Graden. Hierauf nehme man die Last von der Wagschale, drehe den Faden auf, bis der Balken in die horizontale Lage kommt, lege dann ein kleines bekanntes Gewicht in dieselbe Schale und ändere die Torsion, bis der Balken wieder die horizontale Lage einnimmt. Die Anzahl Grade der Torsion in diesem verhält sich so zu der in jenem Falle, wo der zu prüfende Körper auf der Wagschale lag, wie das bekannte zum unbekannten Gewichte. Beträgt z. B. die Torsion im ersteren Falle 50°, im zweiten hingegen, wo 1 Gr. auf der Wagschale liegt, 1000°, so ist das gesuchte Gewicht $^{50}/_{1000}$ Gr.

Hat der abzuwägende Körper viel mehr als 1 Gr., so thut man am besten, sein Gewicht bis auf die Bruchtheile eines Granes auf die gewöhnliche Weise zu finden, den Bruchtheil aber durch die Torsion zu bestimmen. Hat z. B. ein Körper nahe 100 Gr., so gebe man dem Faden, wie vorhin, eine Torsion von 2 — 3 Peripherien, bringe den Balken durch ein Gegengewicht in die horizontale Lage, lege dann den Körper in eine Schale, in die andere so viel Tara, bis zwischen beiden vollkommenes Gleichgewicht herrscht, ersetze

hierauf den Körper durch Gewichte, die das Gleichgewicht nahe wieder herstellen, und nur etwa um einen Bruchtheil eines Granes geringer sind als der Körper. Man drehe aber den Faden so weit, bis der Balken vollkommen horizontal steht, und bemerke diese Torsion. Bringt man dann ein Grangewicht in die Schale, und beobachtet die Torsionsgrade, welche nothwendig sind, den Wagebalken wieder in die horizontale Lage zu bringen, so gibt das Verhältniſs der zwei Torsionen das des gesuchten Bruchtheils zu 1 Gr. Z. B. man finde, daſs der Körper mit 99 Gr. beinahe im Gleichgewichte stehe, aber zur vollkommenen Herstellung desselben doch noch eine Windung von 50° erfordere, während 1 Gr. 1000° derselben braucht, so ist der vernachlässigte Bruchtheil $= {}^{50}/_{1000}$ Gr.; und das genaue Gewicht dieses Körpers 99.05 Gr.

2. Photometer. Von *Potter*.

(Edinb. journ. of sc. N. VI., p. 278.)

Potter hat mehrere Versuche angestellt über die Lichtmenge, welche Metallspiegel bei verschiedenen Einfallswinkeln reflectiren, und zu diesem Behufe ein Photometer gebraucht, das von den gewöhnlichen Instrumenten dieser Art etwas abweicht. Da diese so wichtigen Werkzeuge bei weitem noch nicht so cultivirt sind, als sie es verdienen, so muſs wohl jeder Beitrag zur weiteren Vervollkommnung derselben willkommen seyn, und aus diesem Grunde wird hier das Wesentliche von der Einrichtung des *Potter*'schen Instrumentes angegeben.

Das Princip hat dieses Photometer mit dem *Bouguer*'schen, in der neueren Zeit von *Ritchie* verbesserten (Zeitschr. Bd. I., S. 72) gemein, indem es auf der scheinbaren Stärke der Erleuchtung beruht, die ein Kör-

per durch zwei verschiedene Lichtquellen erhält. Man denke sich, um eine richtige Vorstellung von diesem Instrumente zu bekommen, einen horizontalen Tisch, der durch eine verticale, der Lage nach senkrecht auf der Tischplatte stehende, undurchsichtige Papierplatte in zwei Theile getheilt ist, und an einem Ende des Tisches senkrecht sowohl auf dem Tische als auf der verticalen Platte eine andere undurchsichtige Wand, die aber in der Mitte ein viereckiges, $2\frac{1}{2}$ Z. hohes, 4 Z. langes Loch hat, das mit feinem Papier überdeckt ist. Stellt man in jede der zwei Abtheilungen des Tisches eine Kerzenflamme, so beleuchtet jede eine Hälfte des Papiers über der viereckigen Öffnung, und man sieht hinter dem Papier diese beiden Hälften durch den Schatten der Scheidewand von einander getrennt, kann aber leicht durch Annähern oder Entfernen der einen oder anderen Lichtquelle die Beleuchtung beider Hälften auf gleiche scheinbare Stärke bringen. Ist dieses der Fall, so verhalten sich die Lichtstärken wie die Quadrate der Entfernung der betreffenden Flammen von der Öffnung.

X.

Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

A. Optik.

1. Neue Polarisations-Phänomene. Von *L. Nobili.*

(*Bibl. univ. Nov.* 1830, *p* 239.)

Eine der interessantesten electrisch-chemischen Erscheinungen der neueren Zeit sind ohne Zweifel die ringförmigen farbigen Ablagerungen auf Metallplatten,

die durch den electrischen Strom einer schwachen Säule nach *Nobili's* Anleitung entstehen. Diese Zeitschrift gibt im II. u. III Bande davon nähere Nachricht. *Nobili* hat diese Phänomene nun auch in optischer Beziehung näher untersucht, und gibt in der oben genannten Quelle Nachricht über eine neue Classe von Polarisationserscheinungen, worüber er die Beobachtungen zwar noch nicht beendet, aber doch so weit gebracht hat, dafs er sie bekannt machen zu müssen glaubt.

Es ist bekannt, dafs die in dünnen Plättchen, wie z. B. Seifenblasen, erscheinenden Farbenringe, die man gewöhnlich *Newton*'sche Farbenringe nennt, unter jedem Einfallswinkel mittelst eines Doppelspathes zwei Bilder *derselben Farbe* und nahe von derselben Lichtstärke geben, woraus man schliefst, dafs solche dünne Plättchen das Licht nicht polarisiren. Die farbigen Ringe, welche auf Metallplatten durch den electrischen Strom als Niederschläge aus Salzauflösungen etc. entstehen, erscheinen hingegen bei einem sehr schiefen Einfall durch einen Doppelspath in zwei Bildern *von verschiedener Farbe*, die sich aber nicht gegenseitig zu Weifs ergänzen, wie es bei den polarisirten Farben sonst zu geschehen pflegt, sondern sie geben vereinigt die Farbe, welche dem Ringe im gewöhnlichen Zustande ohne Hülfe des Doppelspathes bei demselben Einfallswinkel der Strahlen zukommt. Der Grad der Politur des Metalles, worauf dieses vor sich geht, hat auf das Phänomen keinen anderen Einflufs, als dafs bei rein spiegelnden Flächen die Bilder reiner und deutlicher werden, als bei anderen; auch ist es einerlei, ob die Einfallsebene der Strahlen mit den feinen auf dem Metallboden vorkommenden Ritzen parallel oder darauf senkrecht ist.

Die Neigung, unter welcher die Trennung eines

Ringes in zwei farbige Theile eintritt, richtet sich nach der Farbe desselben. Azurblau erleidet diese Spaltung unter allen zuerst. Die vollständigste Entwicklung tritt zwischen 15° — 5° ein. Auch die Intensität der zwei Farben ändert sich von einer Farbe zur anderen, und bald erscheint das gewöhnliche, bald das ungewöhnliche Bild am stärksten gefärbt. Die Ringe, deren Farbe der ersten der *Newton*'schen Scale entspricht, haben im gewöhnlichen, die mit der Farbe des vierten Ringes hingegen im ungewöhnlichen Bilde die meiste Licht- und Farbenstärke.

Bekanntlich ändert sich die Farbe und Breite der *Newton*'schen Ringe, wenn man sie immer schiefer und schiefer ansieht, aber sie folgen auf einander nach der Ordnung der Farbenscale im senkrecht auffallenden Lichte.

Unter einem kleinen Einfallswinkel verhalten sich auch die *Nobili*'schen Ringe auf gleiche Weise, bei grösseren Neigungen der Strahlen hingegen erscheinen die Farben in einer anderen Ordnung. Demnach hängt der Farbenton der hier besprochenen Phänomene sowohl von der Neigung als vom Polarisationszustande ab. Deckt man eine Farbe mit einer dünnen Schichte Wasser, Alkohol, Firnifs oder Öhl, und sieht sie dann durch einen Doppelspath an, so findet jene Theilung der Ringe und Farben nicht mehr Statt, und es verhält sich alles so wie bei *Newton's* Farbenringen. Diese Wirkung dünner Schichten gibt ein treffliches Mittel an die Hand, die Wirkung der Schiefe der Strahlen von jener der Polarisation zu trennen. Man braucht nämlich nur die Hälfte eines Ringes mit Firnifs, Wasser etc. zu decken, aber die andere frei zu lassen, und dann den Ring durch einen Doppelspath bei verschiedener Neigung der Strahlen anzusehen.

Diese Erscheinungen, welche *Nobili* zuerst an seinen Ringen beobachtet hat, bemerkt man auch an Metallen, welche durch Kunst oder auf natürlichem Wege einen dünnen Überzug erhalten haben, wie z. B. an blau angelaufenen Uhrfedern, am Kupfer, an Eisenerzen. Sieht man sie durch einen Doppelspath an, so erscheinen bei einem schiefen Einfall zwei Bilder mit verschiedenen Farben. Selbst Insectenflügel, wo doch an keine metallische Unterlage zu denken ist, gewähren ähnliche Phänomene. Die Flügel der *Chylocopa violacea (Fab.)* sind violett, durch einen Doppelspath angesehen erscheint das gewöhnliche Bild roth-violett, das ungewöhnliche dunkelgrün; die der *Chrysomela graminis (Fab.)* sind grüngelb, und geben mittelst eines Doppelspathes ein gewöhnliches gelbliches und ein ungewöhnliches dunkelgrünes Bild.

Man sieht leicht ein, daſs diese Phänomene von denen verschieden sind, welche sich an dünnen Blättern im polarisirten Lichte zeigen. Blättchen, welche sich im polarisirten Lichte farbig zeigen, sind krystallisirt, die hier besprochenen haben kein krystallinisches Gefüge; erstere liefern die betreffenden Phänomene bei viel gröſseren Dicken, und geben Farben, die sich zu Weiſs ergänzen, welches bei letzteren niemals der Fall ist.

2. Über die Wirkung der Hinterfläche durchsichtiger Körper auf das Licht. Von *Brewster.*

(Phil. transact. 1830. P. I., p. 145)

Den Physikern, welche sich mit den Phänomenen der Polarisation des Lichtes vertraut gemacht haben, ist ein sehr sinnreicher Versuch *Arago's* gewiſs bekannt, durch welchen er zu beweisen glaubte, daſs eine Glas-

platte einen von ihr ins Auge gelangenden Lichtstrahl so modificirt, daſs der durch Brechung polarisirte Antheil desselben dem durch Reflexion polarisirten vollkommen gleich ist, der Winkel, unter welchem der eine Theil durch das Glas geht, und der, unter welchem der andere von ihrer Vorderfläche reflectirt wird, mag wie immer beschaffen seyn. Diesen Satz bestreitet aber *Brewster*, und beweiset, daſs er nur für Winkel gilt, die dem Polarisationswinkel sehr nahe liegen, für andere aber weit von der Wahrheit abweicht. Um nun den Weg genau kennen zu lernen, auf welchem *Brewster* gegen *Arago* kämpft, müssen wir den *Arago*'schen Versuch näher vor's Auge rücken. Letzterer bediente sich einer Glasplatte *DE* (Fig. 15) mit parallelen Wänden, stellte sie auf eine weiſse Fläche *AB*, so daſs von letzterer sowohl in der Richtung *AI* als in der Richtung *BI* Licht auf *DE* fiel, und von ersterem der reflectirte, von letzterem der gebrochene Theil, beide zu einem Strahl *SO* vereinigt, ins Auge *O* gelangen konnten. Um nur diesen Strahl ins Auge zu leiten, wurde ein undurchsichtiger Schirm *mn* mit einer Öffnung vor dem Glase angebracht, der alle Strahlen bis auf *IO* abhielt. Das Licht konnte durch einen Doppelspath *C* analysirt werden. Dieser zeigte *Arago* stets zwei Bilder der Öffnung am Schirme von gleicher Intensität, wenn sowohl *AI* als *BI* ins Auge kommen konnte. Wurde aber *BI* durch einen Schirm abgehalten, so erschien das gewöhnliche Bild stärker als das ungewöhnliche, während gerade das Gegentheil eintrat, wenn dasselbe mit dem Strahl *BI* geschah.

Gegen diese Versuchsweise *Arago's* wendet nun *Brewster* ein, daſs der Strahl *SO* nicht bloſs aus zwei nach entgegengesetzten Richtungen polarisirten Theilen bestehe, sondern aus mehreren durch partielle Reflexio-

nen und Refractionen entstandenen. Nämlich ein Theil des Strahles *BI* erleidet in der Platte partielle Reflexionen, wird hierdurch in der Ebene der Reflexion polarisirt, und kommt so ins Auge *O*. Dasselbe erfolgt mit einem Theile des Strahles *AI*, während ein anderer schon an der Vorderfläche reflectirt wird, so daſs demnach drei Theile des Strahles *IO* in der Ebene der Reflexion, und nur zwei, nämlich die an jeder der zwei Glasflächen gebrochenen, in entgegengesetzter Richtung polarisirt sind. Nun steht aber der durch eine Reflexion polarisirte Strahl dem durch zwei Refractionen polarisirten in Betreff seiner Polarisations-Intensität nach, und wenn *Arago* bei seinem Versuche wirklich zwei *gleich intensive* Bilder mittelst des Doppelspathes erhalten hat, so kann dieses nur davon herrühren, daſs die übrigen reflectirten Strahlen die Compensation bewirkt haben, und *Arago's* Satz kann höchstens nur auf Platten, nicht auf einzelne Flächen bezogen werden. Nimmt man statt der allenthalben gleich dicken Glasplatte ein dreiseitiges, wohl abgekühltes Glasprisma *EDF* (Fig. 16), und läſst den Strahl *BD* senkrecht durch die Hinterwand *FD* eintreten, so bleibt diese Wand ohne polarisirende Wirkung, und man erhält einen Erfolg, als hätte man es nur mit einer einzelnen polarisirenden Fläche zu thun.

Um den wahren Verlauf der Sache richtig einzusehen, ist es nothwendig näher zu untersuchen, welche Veränderungen ein Strahl durch zwei Brechungen und eine dazwischen vor sich gehende Reflexion erleidet. Zu diesem Behufe braucht *Brewster* ein Glasprisma *MN* (Fig. 17), bei welchem eine Fläche *Md* so gegen *MQ* geneigt ist, daſs der gebrochene Antheil *AC* eines natürlichen (d. h. unter $+45^0$ und -45^0 polarisirten), nahe unter 83^0 auffallenden Strahles *RA* nach der Re-

flexion in *C* die Fläche *Md* senkrecht durchdringt, und demnach keine Änderung seines Polarisationszustandes erleidet. Da bei diesem Einfallswinkel der in *A* reflectirte Antheil *AP* unter 36° ½ geneigte Polarisationsebenen hat (siehe *Brewster's* Aufsatz in Bd. IX., S. 494), so müßste dieses auch mit dem Strahl *CS* der Fall seyn, wenn er in *A* keine Brechung erlitten hätte: aber durch diese Brechung entsteht eine Wendung der Polarisationsebenen um 53° — 45° = 8° in einer Richtung, welche der durch die zweite Reflexion in *C* entgegengesetzt ist, und so muſs die Neigung der Polarisationsebenen des Strahles *CS* nahe 36° ½ + 8° = 44° ½ seyn, und der Strahl ist nahe in den natürlichen Zustand zurückgekehrt. Betrüge dieser Winkel 45°, so wäre er vollkommen in natürlichen Zustand versetzt.

Um nun die Wirkung einer zweiten Brechung des in *C* reflectirten Strahles zu erfahren, kittete *Brewster* auf die Fläche *Md* ein anderes dreiseitiges Glasprisma, wodurch das Ganze in ein rechtwinkeliges Prisma verwandelt wurde, und untersuchte nun, ohne etwas anderes abzuändern, den Polarisationszustand des Strahles *bs*. Er fand die Neigung seiner Polarisationsebenen wieder = 53°, mithin, daſs die zwei Brechungen in *A* und *b* die Reflexion in *C* überwältiget haben, und der Strahl *bs* Licht enthielt, das senkrecht auf die Reflexionsebene polarisirt war.

Ein anderer Versuch führte zu demselben Resultate. Ein massives Prisma, wie *McNQ*, trennt die Theile *AP* und *bs* eines Strahls *RA* hinreichend von einander, so daſs man jeden einzeln untersuchen kann. Da fand *Brewster* bei einem Einfallswinkel von 83° die Neigung der Polarisationsebenen des Strahles *AP* gleich 37° ½, die des Strahles *bs* nahe 55°, also fast gleiche Wirkung wie die der Brechung bei einem Einfall von 83°.

Fällt der Strahl RA unter dem Polarisationswinkel von $56^\circ\,45'$ auf, so erleidet die Polarisationsrichtung durch die Refraction in A eine Änderung von 2°, und die Neigung I der Polarisationsebene ist $45^\circ + 2^\circ = 47^\circ$, so daſs man den Strahl CB immerhin als vollkommen in der Ebene der Reflexion polarisirt ansehen kann. Ist nun $I = 0$, so kann die Brechung in b die Polarisationsebene nicht ändern, und daher kommt es, daſs die zweifache Änderung der Polarisationsrichtung in A und b, deren jede 2° beträgt, beim vollkommenen Polarisationswinkel ohne Wirkung bleibt. Ist nun die Neigung der Polarisationsebene gegen die der Reflexion nach der ersten Reflexion in $A = \varphi$, dieselbe nach der Reflexion in $C = \varphi'$, und die nach der zweiten Brechung in $b = \varphi''$, so hat man in der Voraussetzung, daſs x die ursprüngliche Neigung der Polarisationsebene gegen die Reflexionsebene, i den Einfalls-, i' den Brechungswinkel bedeutet:

$$\cot.\varphi = \cot.x\cos.(i - i'),\quad \text{tang.}\varphi' = \text{tang.}x\,\frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')^2},$$

$$\cot.\varphi'' = \cot.x\,\frac{\cos.(i-i')^3}{\cos.(i+i')}.$$

Handelt es sich um gewöhnliches Licht, so ist $x = 45^\circ$, und das Licht hat selbst nach den hier besprochenen Brechungen und Reflexionen den Charakter des gewöhnlichen, sobald

$$\cot.\varphi'' = 1 \quad \text{oder} \quad \cos.(i-i')^3 = \cos.(i+i')$$

ist. Bei Glas, für welches der Brechungsexponent $m = 1.525$ ist, tritt dieses bei $78^\circ\,7'$, bei Diamant ein wenig unter 78°, und bei Wasser etwas über 80° ein. Bei einem kleineren Winkel wird $\varphi < 45^\circ$, und der Lichtstrahl enthält Licht, das in der Reflexionsebene polarisirt ist; bei einem gröſseren ist $\varphi > 45^\circ$, und der Strahl enthält einen senkrecht auf die Reflexionsebene polari-

sirten Antheil. Es ergibt sich demnach hieraus das folgende merkwürdige Gesetz:

Ein von der Hinterfläche einer durchsichtigen Platte reflectirter Lichtbüschel, der nach zwei Brechungen und einer inzwischen liegenden Reflexion ins Auge gelangt, enthält bei jedem Einfallswinkel von 0° bis zu dem der vollkommenen Polarisation einen in der Reflexionsebene polarisirten Antheil. Bei einem gröſseren Winkel nimmt die Menge des so polarisirten Strahles ab, bis $\cos.(i+i') = \cos.(i-i')^3$, in welchem Falle der Strahl den Character des gewöhnlichen Lichtes erhält; unter dem Polarisationswinkel kommt ein senkrecht auf die Reflexionsebene polarisirter Antheil im Strahle vor, erreicht ein Maximum, und wird $=0$ bei 90°.

Für den Strahl CS', der nur *eine* Brechung und *eine* Reflexion erlitten hat, ist $\text{tang.}\,\varphi' = \frac{\cos.(i+i')}{\cos.(i-i')^2}$, und es wird $\varphi' = 45°$, mithin der Strahl ein unpolarisirter, wenn $\cos.(i+i') = \cos.(i-i')^2$ ist. Dieses tritt bei Glas unter 82° 44′ ein. Bei jedem kleineren Winkel enthält der Lichtbüschel Theile, die in der Reflexionsebene, bei jedem gröſseren solche, die in einer darauf senkrechten Richtung polarisirt sind. Folgende Tafel gibt den Polarisationszustand der Strahlen AC, CS und bs für verschiedene Einfallswinkel näher an:

Einfallswinkel an der ersten Fläche.	Brechungswinkel an der ersten, u. Einfallswinkel an der zweiten Fläche.	Neigung der Polarisationsebene von		
		AC.	*CS.*	*b s.*
0° 0′	0° 0′	45° 0′	45° 0′	45° 0′
32 0	20 33	45 34	32 20	32 51
40 0	25 10	45 58	24 12	24 56
45 0	27 55	46 17	17 49	18 38
56 30	33 30	47 22	0 0	0 0
67 0	37 34	48 57	18 20	20 50
70 0	38 30	49 33	23 34	27 6
75 0	39 46	50 45	32 22	37 48
78 37	40 29	51 49	38 10	44 59
79 0	40 33	51 56	38 49	45 46
80 0	40 42	52 16	40 27	47 46
83 0	41 5	53 21	44 39	53 40
86 30	41 23	54 47	50 58	60 13
90 0	41 58	56 29	56 29	66 19

Nun hält es auch nicht schwer, Formeln zu entwickeln, welche die Menge des im Büschel *CBS* oder *b s* enthaltenen polarisirten Lichtes darstellen. Fällt auf *Nc* gemeines Licht auf, so wird durch die Brechung in *A* die Polarisationsebene um den Winkel x verrückt, und man hat $\cot. x = \cos. (i - i')$. Setzt man die Intensität von $AC = 1$, so ist nach *Fresnel's* Formeln die Intensität I der beiden unter $+45^\circ$ und -45° polarisirten, d. h. des natürlichen Antheiles

$$I = \frac{\cos.^2 (i - i')}{\sin.^2 (i + i')} \cos.^2 x + \frac{\tang.^2 (i - i')}{\tang.^2 (i + i')} \sin.^2 x,$$

und die Menge Q des polarisirten Lichtes

$$Q = I \left\{ 1 - 2 \frac{\left(\frac{\cos. (i + i')}{\cos. (i - i')}\right)^2}{1 + \left(\frac{\cos. (i + i')}{\cos. (i - i')^3}\right)^2} \right\}.$$

Heifst aber die Intensität $BC = 1$, so erhält man eben so

$$\text{tang.}\, x = \frac{\cos.(i + i')}{\cos.^2 (i - i')},$$

und für $b\,s$

$$I = 1 - \frac{\sin.^2 (i - i')}{\sin.^2 (i + i')} \cos.^2 x + \frac{\text{tang.}^2 (i - i')}{\text{tang}^2 (i + i')} \sin.^2 x,$$

$$Q = I \left\{ 1 - 2 \frac{\left(\frac{\cos.^3 (i - i')}{\cos.(i + i')}\right)^2}{1 + \left(\frac{\cos.^3 (i - i')}{\cos.(i + i')}\right)^2} \right\}.$$

B. W ä r m e.

1. Selbstentzündung des Kohlenpulvers. Von *Aubert.*

(Ann. de Chim. etc. Tome 45, p. 73.)

Es hat sich innerhalb weniger Jahren in mehreren Pulverfabriken Frankreichs der Fall ereignet, dafs sich Kohlenpulver von selbst entzündete, ohne dafs man die Bedingungen kannte, unter welchen dieses erfolgte. *Aubert*, französischer Artillerie-Hauptmann, hat mit Beihülfe mehrerer Officiere seines Corps diese Bedingungen näher untersucht, und dabei Folgendes gefunden:

Fein gepulverte Kohlen absorbiren schnell Luft und Wasser, sie nehmen dabei an Gewicht zu, setzen dieses mehrere Tage lang fort, erwärmen sich oft bis zu 170° und 180°, und gerathen dann gar in Brand. Dieser beginnt nahe am Mittelpuncte der ganzen Masse oder 12 — 15 Centimeter unter der Oberfläche, wo auch die Temperaturerhöhung gröfser ist, als an jeder anderen Stelle, so dafs man annehmen mufs, es dringe die Luft am Rand des Gefäfses in die Kohlenmasse ein, bilde daselbst einen absteigenden Strom, der sich gegen den Mittelpunct hinzieht, daselbst in verticaler Richtung

aufwärts geht, ohne weiter in die Masse einzudringen. In einer Kohlenpulvermasse fand man seitwärts 15 Centimeter über dem Boden des Gefäſses die Temperatur $= 37^{0}$ *C.*, mitten in der Masse $= 55^{0}$, und noch höher 170^{0} *C.* Änderungen im Luftdrucke, im Zustande der Wärme und der Feuchtigkeit der Luft sind, wenigstens so weit dieses die angestellten Versuche darthun konnten, ohne Einfluſs auf das genannte Phänomen. Dasjenige, wovon die Inflammation der Kohlen überhaupt abhängt, besteht in Folgendem:

1. Die *Art der Verkohlung.* Schwarze, durch starke Verkohlung erhaltene Kohlen entzünden sich leichter als braune, die nur schwach verkohlt sind. In einem Kessel durch Destillation erzeugte Kohlen entzünden sich am schwersten.

2. Die *Masse des Kohlenpulvers.* Die entzündlichste schwarze Kohle entzündet sich nur bei einer Masse von 30 Kilogrammen (53.6 W. Pf.), eine minder entzündliche braucht dazu eine noch viel gröſsere Masse. Eine in einem Kessel erzeugte Kohlenmasse von 42 Kilogrammen erwärmte sich nur bis auf 47^{0} *C.*, während eine doppelt so groſse Masse derselben Art sich entzündete, und schon 1 ½ Stunden zuvor eine Temperatur von 170^{0} angenommen hatte.

3. Die *Zeit, welche zwischen der Verkohlung und dem Verkleinern verflieſst.* Je kürzer diese ist, desto sicherer tritt eine Entzündung ein. Bei einer Kohlenmasse, die 95 Kil. wog, erst 5—6 Tage nach ihrer Erzeugung verkleinert, und in dem Verhältnisse 45 : 31 : 15 in drei Theile getheilt wurde, deren jeder in ein besonderes Gefäſs kam, das seinem Inhalte proportionirt war, trat durchaus keine Entzündung ein, selbst die gröſste Masse erhitzte sich bei einer anfänglichen Temperatur von 33^{0} *C.* nur bis auf 55^{0}, die anderen zwei gar nur

auf 40° *C.* Eine andere Masse hingegen von 30 Kil., die schon 24 Stunden nach der Verkohlung zerstampft wurde, brach schon nach 12 Stunden in Brand aus.

4. *Freier Zutritt der Luft an der Oberfläche.* Von zwei Kohlenmassen, deren jede 45 Kilog. betrug, und wovon eine in einem offenen, die andere in einem verdeckten Gefäſse aufbewahrt wurde, entzündete sich nur die erstere, und zwar schon nach 18 Stunden, die andere erlitt nur eine Temperaturerhöhung von 8° *C.*

5. *Zusatz von Schwefel und Salpeter heben die Selbstentzündung auf*, ohne jedoch die Absorption der Luft ganz zu hindern, aber es unterbleibt in einem solchen Gemenge eine geringe Temperaturerhöhung nicht. Eine Kohlenmasse, die 10 Stunden nach ihrer Erzeugung mit 125 pCt. Schwefelpulver gemengt worden war, erlitt nur eine Temperaturerhöhung von 34°, und nahm am Gewichte um $^1/_{330}$ zu. Ein Gemenge von Kohlen und Salpeter, dessen Masse 25 Kilog. betrug, erlitt gar nur eine Temperaturerhöhung von 23°. Man darf demnach nicht besorgen, daſs Gemenge aus Kohlenpulver und Schwefel oder Salpeter sich von selbst entzünden, doch ist es räthlich, sie nicht in zu groſse Massen zusammen zu geben, damit nicht etwa die Erwärmung doch zu groſs werde.

2. Versuche über Kerzendochte. Von *Reid.*

(Edinb. phil. journ. N. VI., p. 337.)

Wachs, Unschlitt und viele andere Stoffe schmelzen bei einer bestimmten Temperatur, und erleiden bei einer noch höheren eine Zersetzung in Kohlenstoff, Wasserstoff und Sauerstoff. Diese Bestandtheile treten unter dem Einflusse der atmosphärischen Luft zu neuen Producten mit einander in Verbindung, und es entwickelt sich dabei Licht und Wärme. Handelt es sich um

die Benützung des ersteren, so braucht man in der Regel nebst der zu verbrennenden Substanz auch noch einen anderen fadenartigen Körper, der durch Capillarität einen Theil des bereits geschmolzenen Brennmaterials aufnimmt, der Flamme zuführt, und dieselbe auf solche Weise weiter nährt. Man nennt diesen Stoff, der in den meisten Fällen selbst verbrennlich seyn muſs, den *Docht*. Die Einrichtung desselben hat auf die Menge des beim Verbrennen entwickelten Lichtes einen sehr groſsen Einfluſs. Darum hat *Reid* einige Versuche angestellt, um die beste Einrichtung desselben kennen zu lernen. Von diesen Versuchen folgt hier das Wesentlichste:

Bei Kerzendochten kommt es vor Allem auf die Dimensionen derselben an. Ist der Docht zu kurz, so nähert sich die Flamme zu sehr dem schmelzbaren Brennmaterial, schmilzt einen zu groſsen Theil davon, und bewirkt dadurch ein Abſlieſsen desselben und eine zu groſse, der Lichtentwickelung nachtheilige Wärmeconsumtion; ist derselbe hingegen zu lang, so bewirkt er schon durch seinen Schatten eine Lichtverminderung, noch mehr aber durch die Wärme, die er fortwährend aufnehmen muſs, um bei seiner Temperatur verharren zu können, die dadurch anderen Theilen entgeht, und der Vollkommenheit des Verbrennungsprozesses Abbruch thut, woher es dann wieder kommt, daſs sich unverbrannte Kohle ausscheidet, die theils einen sichtbaren Rauch bildet, theils sich an den Docht anlegt, und ihn noch mehr vergröſsert. Eben so kann eine unproportionirte Dicke des Dochtes schädlich werden. Ist derselbe zu dünn, so biegt er sich um, fällt auf die Kerze zurück, und zieht auch zu wenig Brennmaterial; ist er aber zu dick, so wirkt er eben so schädlich ein, als wenn er zu lang wäre. Da es aber schwer hält, gleich

die rechte Dicke zu treffen, so bereitete sich *Reid* zum Versuche Kerzen mit eigenen Dochten. Eine derselben, die wir *A* heifsen wollen, bekam einen Docht, der aus drei neben einander befindlichen Litzen bestand, und breiter als dick war; eine andere *B* bekam zwei Dochte, die von einander etwas abstanden, und deren jeder aus 5 Fäden bestand; eine dritte *C* erhielt drei besondere Dochte, jeden zu 5 Fäden, und endlich eine vierte *D* einen runden Docht aus 20 Fäden. Das Licht, welches jede einzelne solche Kerze gab, wurde nach der Intensität der Schatten mit dem einer Wachskerze verglichen. Als Resultat dieser Vergleichung gibt *Reid* folgende Zahlen an, zu denen hier noch die relative Lichtstärke nach dem Quadrate der Entfernung vom schattenwerfenden Körper besonders beigesetzt wird.

Kerze.	Entfernung vom schattenwerfenden Körper.	Lichtstärke.
Gemeine Wachskerze	18	100
Kerze *A*	17	89
» *B*	18	100
» *C*	26½	216
» *D*	15	69

Um den Einflufs der Gröfse der Flamme auf die Lichtstärke zu erfahren, wurden drei Kerzen *E*, *F*, *G* bereitet; jede hatte drei Dochte. Diese bestanden aber bei *E* aus 5, bei *F* aus 4, und bei *G* aus 3 Fäden. Man fand Folgendes:

Kerze.	Entfernung.	Lichtstärke.
Wachskerze . . .	18	100
Kerze *E*	16½	81
» *F*	23¾	174
» *G*	21½	142

Von grofsem Einflusse auf Lichtentwickelung ist bei Körpern mit mehreren Dochten die Entfernung der-

selben von einander. Bei einer Kerze mit 2 Dochten aus 5 Fäden nimmt die Lichtstärke zu, bis die Dochte $^1/_4$ Z. von einander abstehen; über diese Grenze hinaus erscheinen zwei abgesonderte Flammen; es nimmt aber die Lichtstärke nicht merklich ab, bis die Dochte $^1/_3$ Z. Entfernung haben, wo die Trennung der Flammen vollständig erfolgt. Die Entfernung von $^1/_6$ Z. dürfte für Dochte am zuträglichsten seyn.

Bei einem Versuche, wo es sich um die Bestimmung der comparativen Talgmenge handelte, die eine bestimmte Lichtintensität gibt, wurden zwei Talgkerzen, eine mit gewöhnlichem, die andere mit zwei Dochten, gewählt, und bei der Comparation gefunden, daſs, wenn beide sehr kurz geputzt waren, keine groſse Differenz Statt fand, denn die gemeine Kerze verzehrte bei einem Versuche in einer halben Stunde 68 Gr., die andere 66 Gr. Talg, wenn die Flamme in beiden gleich groſs erhalten wurde; bei einem anderen Versuche war gar die Talgmenge in beiden völlig gleich.

Lieſs man aber Kerzen so lange brennen, ohne sie zu putzen, bis ihr Docht eine Länge von 1 Z. erlangt hatte, wo die Talg-Consumtion nahe dieselbe war, so ergaben sich bei der Vergleichung ihrer Lichtmenge folgende Resultate:

Kerze.	Entfernung.	Lichtstärke.
Wachskerze	18	100
Talgkerze mit 2 Dochten, jeder von 5 Fäden, kurz geputzt	$21^1/_2$	142
Dieselbe ungeputzt	$19^1/_2$	117
Talgkerze mit 1 Docht, aus 20 Fäden, kurz geputzt	15	69
Dieselbe ungeputzt . .	$7^1/_2$	17

Es gibt demnach eine Talgkerze mit 2 Dochten nahe so viel Licht wie eine Wachskerze, doch müssen die Fäden der Dochte erst einzeln gedreht, und dann zu einem Dochte verbunden seyn. Ist dieses nicht der Fall, und sind alle Fäden mit einander eher vereiniget als sie gedreht worden, so ändert sich ihre Lage während des Verbrennens beständig, bald entfernen sie sich von einander, bald nähern sie sich wieder, und bewirken dadurch vielen Schaden. Die Dochte müssen die rechte Stärke haben, theils damit sie sich gehörig spannen lassen, theils damit sie sich nicht umbiegen beim Verbrennen. 8 Fäden sind dazu hinreichend. Man thut gut, die Kerze etwa um 10° gegen die Verticale in der Ebene der Dochte zu neigen.

C. Electricität.

1. Einflufs der Electricität auf die Phosphorescenz von Mineralien. Von *T. J. Pearsoll.*

*(Journ. of the royal institution. N. I., p. 77. *)*

Pearsoll, chemischer Assistent im Laboratorium der Royal Institution, lehrt im gegenwärtigen Aufsatze, Mineralien, welche durch Erwärmen gar nicht oder nur zum schwachen Phosphoresciren gebracht werden, mittelst Electricität in stärkere Phosphore zu verwandeln. Er gerieth darauf, als er die Wirkung eines electrischen Schlages, der über eine Varietät des Flufsspathes, Chlorophan genannt, geleitet wurde, näher untersuchen wollte. Wurde ein electrischer Schlag über Fragmente oder Pulver von Flufsspath geleitet, so zeigte sich an

---

*) Dieses Journal ist an die Stelle des eingegangenen *Quarterly Journal of sciences* getreten, und erscheint vom October 1830 an vierteljährig.

denselben ein helles, grünes Licht, und erschien so oft, als die Einwirkung des Schlages erneuert wurde, und zwar im verstärkten Maſse. Diese Wirkung führte ihn auf die Vermuthung, daſs selbst jene Mineralien, welche durch Calciniren ihre Phosphorescenz eingebüſst haben, durch einen electrischen Schlag sie wieder erlangen dürften. Um diese Vermuthung zu prüfen, wurde zuerst der Versuch mit einem sehr stark phosphorescirenden Stück Chlorophan gemacht, und dasselbe der Hitze ausgesetzt. Es sendete zuerst helles, bläulichgrünes, dann bei steigender Temperatur blaſsrothes, und als es in die Rothglühhitze kam, blaſsweiſses Licht aus, dann hörte aber alles Leuchten auf. Ein anderes Stück desselben Minerals wurde calcinirt, und verlor dadurch seine phosphorescirende Kraft ganz. Als aber ein Schlag aus einer Leidnerflasche von ungefähr 1 Q. Fuſs Armatur darüber geleitet wurde, erschien es mit grünem Lichte, und sendete dieses selbst später noch aus, nachdem es erwärmt worden war. Die Erwärmung wurde bei diesem und den folgenden Versuchen dadurch angebracht, daſs man das Mineral in ein Platinkapsel legte, es mit einem Uhrglas bedeckte, und unter dem Kapsel eine Weingeistflamme anbrachte.

Ein anderes Exemplar Chlorophan gab in der Hitze ein purpurrothes Licht von sich, verknisterte aber beim Calciniren so stark, daſs man kein einzelnes Stück von hinreichender Gröſse zu einem Versuch mit der Electricität davon gewinnen konnte. Die Bruchstücke wurden in eine Glasröhre gesammelt, drei electrische Schläge durch dieselbe geleitet, und hierauf erhitzt. Da sendeten sie Licht aus, und zwar phosphorescirte fast jedes Stück mit einer anderen Farbe, einige mit grüner, andere mit gelber, wiewohl das von Natur aus durch Hitze für Phosphorescenz empfänglich gemachte Mineral keine

dieser Farben zeigte. Ein zwar calcinirtes, aber nicht electrisirtes Stück zeigte sich beim Erwärmen durchaus nicht phosphorescirend.

Ein Chlorophan, der durch zu starke Einwirkung der Hitze seiner phosphorescirenden Kraft beraubt worden war, erhielt sie wieder durch einen electrischen Schlag. Wiederholte Schläge verstärkten die Phosphorescenz nach Maſsgabe ihrer Stärke und Anzahl. Ein solcher durch Hitze seiner Phosphorescenz beraubter Chlorophan, der selbst, nachdem er 8 Monate lang dem Tageslicht ausgesetzt war, sich nicht im mindesten erholt hatte, erschien während der Einwirkung eines electrischen Schlages mit grünlichem Lichte, dessen Intensität mit der Stärke des Schlages zunahm, und wurde endlich in der Hitze ein förmlicher Phosphor. Ein Krystall von rothem Fluſsspath verhielt sich im Allgemeinen auf dieselbe Weise.

Apatit verlor seine Phosphorescenz durch Calciniren, erhielt sie aber wieder, wenn man ihn electrisirte und dann erwärmte, und zwar in desto höherem Grade, je mehr electrische Schläge man anwendete. Bruchstücke eines Krystalls gaben aber ein besseres Resultat als eine gepulverte Masse.

Wenn diese Versuche beweisen, daſs Mineralkörper, welche von Natur aus durch Erwärmung phosphorescirend werden, und diese Eigenschaft durch die Hitze verloren haben, mittelst eines electrischen Schlages gleichsam wieder in ihren natürlichen Rang eingesetzt werden, so gibt es auch andere, die beweisen, daſs Körper, die von Natur aus nicht durch Wärme phosphorescirend werden können, dazu durch Electricität befähiget werden. Hier folgen einige derselben.

Eine farblose Varietät von Fluſsspath, die im zerriebenen Zustande beim Erwärmen keine Spur von Licht

bemerken liefs, sendete nach 6 Entladungen einer Leidnerflasche intensives rothes oder rothgelbes Licht aus.

Ein Krystall von kohlensaurem Kalk verhielt sich vor der Einwirkung der Electricität eben so in der Wärme, wie der vorhin genannte Flufsspath; als er aber in die Rothglühhitze gebracht, hierauf ein Stück davon in eine Glasröhre gegeben, und electrisirt worden war, zeigte er ein schönes röthliches Licht. Ein massives Stück desselben Krystalls zeigte aber selbst nach der Erhitzung und nach sechs electrischen Entladungen keine Spur von Licht.

Merkwürdig sind die Farbenänderungen, welche Flufsspath durch electrische Schläge erleidet. Man bemerkte nämlich bei Versuchen mit einigen weifsen, ins Gelbliche stechenden Exemplaren dieses Minerals, dafs sie durch den electrischen Strom bläulich werden. Doch erstreckt sich diese Farbenänderung nur auf die äufsere Oberfläche; bricht man nämlich ein solches Stück entzwei, so erscheint es an der Bruchfläche mit seiner natürlichen Farbe.

Diese Färbung durch den electrischen Schlag steht nun auch mit ihrer Lichtaussendung nach dem Erwärmen in genauer Verbindung. Von einem derben rothen Flufsspath, der durch Erhitzen weifs geworden war, wurden mehrere Stücke mit zwölf electrischen Schlägen behandelt, und nahmen dadurch eine lichtblaue Farbe an; wurden nun sowohl diese als andere nicht mit Electricität behandelte der Hitze ausgesetzt, um ihre phosphorescirende Kraft zu erregen, so trat diese Kraft nur an jenen Stücken hervor, und sendete blafsblaues Licht aus, welche die Farbenänderung erlitten hatten, die anderen blieben dunkel; ja solche Stücke zeigten sich gerade nur an jenen Stellen als Phosphore, wo die Farbenänderung eingetreten war.

So wie Flufsspathe, verhalten sich auch Diamanten. Sie konnten durch blofses Erhitzen ohne Einwirkung electrischer Schläge nicht zum Phosphoresciren gebracht werden, sendeten aber in der Wärme nach der Anwendung eines solchen Schlages alsobald ein blafsblaues Licht aus. Doch gibt es in dieser Beziehung unter den Diamanten merkliche Unterschiede. Einige geschliffene Diamanten sind weder von Natur aus Phosphore, noch werden sie es durch einen electrischen Schlag und durch Erwärmen, während andere schon ohne electrische Einwirkung durch die Wärme, wieder andere gar nur durch Electricität und Wärme zu Phosphoren werden. Amethyste, Saphire, Rubine, Granaten und viele andere Mineralkörper besitzen aber weder eine natürliche Phosphorescenz, noch können sie dieselbe durch Kunst erlangen, vielleicht gibt es aber noch ein anderes Mittel, ihre phosphorescirende Kraft zu erregen.

2. Über Zersetzung der Metallsalze durch die *Volta*'sche Säule. Von *Matteucci.*

(Bibl. univ. Oct. 1830, p. 138)

Die Reduction vieler Metalloxyde durch Wasserstoff ist bereits hinlänglich bekannt, eben so, dafs ein electrischer Strom ein Salz in zwei Theile zerlegt, und dafs Metallsalze eine Zerlegung in das Metalloxyd und in die Säure, oder den dieselbe in electro-chemischer Hinsicht vertretenden Stoff erleiden. Dafs endlich sich bei wässerigen Salzlösungen die zerlegende Kraft der Electricität auch auf das Wasser erstrecke, ist nichts Neues. In so ferne würde man es als keine Erweiterung der Wissenschaft ansehen dürfen, wenn Jemand die Entdeckung machte, dafs am negativen Pole einer ihren Strom durch eine wässerige Metallsalzlösung sendenden electrischen Säule nicht ein Metalloxyd, sondern regu-

linisches Metall erscheine, ja das Factum selbst scheint für manche Metallsalzlösung, wie z. B. für Bleizucker, als längst bekannt angesehen zu seyn. Dessen ungeachtet liegt etwas Neues an diesem Factum, und gerade darauf macht *Matteucci* aufmerksam.

Der Wasserstoff wirket nämlich in der Regel nur bei hoher Temperatur als Reductionsmittel für Metalloxyde, im Kreise der *Volta*'schen Säule und für das gerade hervortretende Metalloxyd aber schon bei der gewöhnlichen Temperatur. Derselbe Gelehrte hat die angeführten Thatsachen ferner dazu benützt, um zu erfahren, ob sich Chlor- oder Jodsalze etc. durch Auflösung im Wasser ändern, und in Hydrochlorate, Hydrojodate etc. übergehen oder nicht. Er leitete nämlich den Strom einer Säule, der für sich selbst säuerliches Wasser nicht zu zersetzen vermochte, in eine Kupferchlorurlösung, und bemerkte, daſs der vom negativen Pole ausgehende Platindraht einen Überzug von metallinischem Kupfer erhielt, während sich am positiven Pole Gasblasen entwickelten. Silberdraht statt Platin genommen, überzog sich mit einer gelblichen Schichte, die hierauf violett wurde, und ohne Zweifel Silberchlorur war. Zink- und Eisenjodur zeigten ähnliche Phänomene. Daraus schlieſst *Matteucci*, daſs die Chlor- und Jodsalze ihre Natur durch Auflösung im Wasser nicht ändern.

3. Über den Grund der *Volta*'schen Electricität. Von *Matteucci*.

(Ann. de Chim. etc. Tome 45, p. 106.)

Matteucci führt in einem an *Arago* gerichteten Schreiben von ihm angestellte Versuche an, die für die Theorie der *Volta*'schen Electricität oder des sogenannten Galvanismus ein gewichtiges Wort sprechen, und beweisen, daſs der Grund der Störung des electrischen

Gleichgewichtes zwischen zwei sich berührenden, heterogenen Körpern nicht in einer chemischen Wirkung, sondern in ihrer bloſsen Berührung liege, daſs aber eine etwa mit der Berührung gleichzeitig eintretende chemische Wirkung die Entwickelung der Electricität befördere, etwa so, wie sie die Wärme bei den thermoelectrischen Phänomenen begünstiget. Die Versuche bestanden in Folgendem:

Wurde eine Zinkplatte allein oder in Berührung mit Kupfer in reines, von aller Luft befreites, destillirtes Wasser getaucht, und selbst mehrere Stunden hindurch darin gelassen, so konnte man in demselben auch mit den empfindlichsten Reagentien keine Spur von Zink- oder Kupferoxyd bemerken; es fand also hierbei keine chemische Wirkung Statt. Wurde aber ein präparirter Froschschenkel in destillirtem, von der Luft befreitem Wasser gut gewaschen, um alle animalische Flüssigkeit zu entfernen, hierauf mit dem Nerv an eine Zinkplatte gehängt, die am Boden einer Gasplatte befestiget, am anderen Ende aber mit einem Kupferdraht leitend verbunden war, so erfolgten Zuckungen, sobald man den Frosch mit dem Kupfer berührte, die Glocke mochte atmosphärische Luft, reines Wasserstoffgas, Kohlenoxydgas, Kohlensäuregas, Sauerstoffgas enthalten oder ganz leer seyn, oder es mochten diese Gase trocken oder feucht angewendet werden. Es gibt also hier Electricitätsentwickelung ohne chemische Wirkung, und man kann den Erfolg des *Volta*'schen Fundamentalversuches nicht aus einer chemischen Wirkung des Sauerstoffes auf das Zink erklären. (Vergleiche Bd. VIII., S. 104 dieser Zeitschr.)

4. Über einige, die electromotorische Kraft der Metalle modificirende Umstände. Von *St. Marianini.*

(Ann. de Chim. Tome 45, p. 28.)

Der unermüdete Forscher *Marianini* hat es sich zur Aufgabe gemacht, die Umstände, welche besonders nach *Larive's* Behauptungen der chemischen Theorie des Voltaismus günstig zu seyn scheinen, in nähere Untersuchung zu nehmen, und liefs die Resultate seiner Forschung in einer eigenen Denkschrift bekannt werden, die aus zwei Theilen besteht. Der erste Theil enthält Versuche über die Umstände, welche die electromotorische Kraft der Metalle modificiren, der zweite zeigt die Unzulänglichkeit der electro-chemischen Theorie zur Erklärung der Phänomene der sogenannten Berührungselectricität. Hier kann wegen Mangel an Raum nur vom ersten Theile die Rede seyn, vom zweiten wird im folgenden Hefte gehandelt werden.

Versuche über die Änderung der electromotorischen Kraft sind nicht neu; schon *Volta* wufste, dafs diese Kraft in Metallen durch chemische Veränderungen derselben modificirt wird, und dafs z. B. Schwefeleisen und Schwefelkupfer sich in dieser Beziehung ganz anders verhalten als Eisen und Kupfer für sich, dafs in Legierungen die electromotorische Kraft das Mittel hält zwischen der ihrer einzelnen Bestandtheile. Später sind noch mehrere Umstände, welche eine solche Veränderung hervorbringen, entdeckt worden, alle, meint *Marianini*, lassen sich auf oberflächliche Veränderungen im chemischen Zustande der Stoffe zurückführen. Hier ist von den vorzüglichsten derselben, nämlich vom Einflusse eines electrischen Stromes und der leitenden Flüssigkeit die Rede.

Es ist bereits bekannt, daſs ein Metall oder ein anderer guter Electricitätsleiter an electromotorischer Kraft gewinnt oder verliert, je nachdem die Electricität (nach der Ansicht der Unitarier) von diesem Körper in die Flüssigkeit übergeht oder umgekehrt, es mag dabei der Körper selbst zugleich als Erreger oder als bloſser Leiter dienen. Man braucht, um sich davon zu überzeugen, keine *Volta*'sche Säule oder Batterie, sondern es reicht schon ein einziges Plattenpaar hin. Folgender Versuch zeigt dieses besonders deutlich: Man nehme zwei kleine, völlig homogene Silberplatten, stelle jede derselben in ein Glas mit Weingeist, und setze die hervorragenden Theile derselben mit einander in Berührung. In eines dieser Gläser tauche man eine Bleiplatte auf einige Q. Linien ein, in das andere eine Kupferplatte, sorge aber dafür, daſs keine derselben die Silberplatte berühre, sondern nur die Blei- und Kupferplatte mittelst eines leitenden Drahtes verbunden seyen, und so durch sie ein electrischer Strom entstehe, welcher durch die Silberplatten gehen muſs. Nimmt man, nachdem der Strom einige Secunden angehalten hat, die Silberplatten heraus, verbindet sie mit den Drähten eines Multiplicators, und taucht sie dann in eine schwache Salzlösung, so zeigt die Ablenkung der Magnetnadel, daſs auch die zwei Silberplatten als Electromotoren wirken, mithin durch den Strom, welcher in eine derselben aus der Flüssigkeit eintrat, während er von der andern in die Flüssigkeit überging, heterogen geworden sind. Solche Änderungen bewirkt auch eine electrische Spannung, jedoch nur von sehr geringem Grade; sollen sie sehr merklich seyn, so muſs man mit der Spannung von mehreren Plattenpaaren experimentiren. Biegt man, sagt der Verfasser, einen etwa 1 Mill. dicken Silberdraht bogenförmig, und setzt ihn abwechselnd der Einwirkung

der zwei Electromotoren eines Becherapparates von 100 Elementen über eine Stunde lang aus, so findet man, wenn man ein Ende des Drahtes in die Flüssigkeit des positiven, das andere in die des negativen Poles desselben Apparates taucht, an diesem Drahte mittelst eines 200 Mal verstärkenden Condensators eine Spannung, die wenigstens 5° des *Volta*'schen Electrometers gleich kommt. Gold- und Platindrähte verhalten sich auf gleiche Weise. Wenn also *La Rive* an solchen Metallen keine Spannung bemerkt hat, so kommt dieses gewiſs nur davon her, daſs er nicht gehörig empfindliche Prüfungsmittel angewendet hat. Als ein solcher Silberdraht bei einer Säule von 20 mit Meerwasser aufgebauten Elementen 48 Stunden lang als Leitungsdraht gedient hatte, stand das mit dem Pol verbunden gewesene Ende desselben dem Zinne an electromotorischer Kraft so weit nach, daſs es, mit demselben zu einem Element verbunden, bei Anwendung von Schwefelsäure mittelst eines Multiplicators eine Ablenkung der Nadel von 5° zeigte. Die Kraft des anderen Endes kam der des Goldes nahe. Wurde derselbe Draht abwechselnd 24 Stunden lang der Einwirkung ähnlicher Apparate ausgesetzt, so sank seine electromotorische Kraft gar unter die des Zinkes, und ein Element aus demselben und Zink bewirkte unter obigen Umständen eine Ablenkung von 15°, und der Draht erschien als Träger der positiven Electricität; nach fünf bis sechs Eintauchungen verlor sich die Ablenkung, und trat endlich in entgegengesetzter Richtung auf. Aus öfteren Wiederholungen dieses Versuches ergaben sich folgende Gesetze:

Je öfter man Silber, Gold oder Platin der Einwirkung electrischer Ströme aussetzt, desto leichter wird ihre relative electromotorische Kraft vermindert, so, daſs man sie anfangs nur durch stundenlange Einwir-

kung eines Stromes unter das Zink herabbringen kann, während später einige Minuten dazu hinreichen. Durch Abwischen oder Abtrocknenlassen erhalten sie wieder, was sie verloren. Blei und Zinn, die an und für sich schon dem Zinke nahe stehen, werden leicht unter dasselbe herabgebracht. Doch steht die Leichtigkeit, mit welcher dieses überhaupt bewirket wird, nicht im Verhältnisse mit dem Abstande des Metalles vom Zink in der electromotorischen Reihe. So steht Eisen dem Zinke von Natur aus näher als Silber, und doch hält es bei ersterem schwerer, seine electromotorische Kraft der des Zinkes unterzuordnen, als bei letzterem. Zinn und Kupfer, die vom Zink viel weiter abstehen als Eisen, werden viel leichter electro-positiv gegen Zink. Merkwürdig ist es, daſs nach des Verfassers Beobachtung ein Metall, das man, nachdem es einige Zeit einem electrischen Strome ausgesetzt war, um es unter das Zink herabzubringen, gut abtrocknet und dann auf seine electromotorische Kraft untersucht, nicht bloſs über dem Zinke steht, sondern auch über jenen Metallen, denen es vor der Einwirkung des Stromes vorging. Ein wohl polirter, mit Zink zu einem Element verbundener Messingdraht gab eine Ablenkung der Magnetnadel von 10°, als er aber $^1/_4$ Stunde dem Strome einer Säule von 50 Plattenpaaren ausgesetzt war, eine Ablenkung von 10° nach entgegengesetzter Richtung; gleich nach diesem Versuche aber bewirkte er wieder eine Ablenkung von 20° nach der ersteren Richtung. Ein solcher nicht polirter Draht bewirkte anfangs mit Zink eine Ablenkung von 24°, nachdem ein electrischer Strom $^1/_2$ Stunde auf ihn gewirkt hatte, eine solche von 90°. Kupferdrähte gaben ähnliche Wirkungen.

Wenn bei solchen Versuchen Drähte längere Zeit hindurch dem Einflusse eines electrischen Stromes aus-

gesetzt waren, so stieg die Flüssigkeit, in welche der Draht getaucht war, gleichsam wie durch Capillarität am hervorstehenden Drahtstücke hinauf, und änderte so auch die electromotorische Kraft des Drahtes an dieser Stelle, jedoch in geringerem Grade, als es mit dem eingesenkten Theile der Fall war.

So viel über den Einfluſs electrischer Ströme auf die electromotorische Kraft. Bekanntlich erleiden Electromotoren durch die Flüssigkeit häufig Veränderungen, und diese stehen auch mit einer Modification ihres electromotorischen Verhaltens in Verbindung. So z. B. wird diese Kraft am Eisen in Salpetersäure vermindert, am Zinn hingegen bedeutend gesteigert. Überhaupt wird nach früheren Versuchen *Marianini's* diese Kraft am Eisen, Zinn, Blei und Zink durch Berührung mit Salzauflösungen oder verdünnten Säuren geschwächt, spätere, um deren Aufzählung es sich hier handelt, zeigen auch an anderen Metallen ein ähnliches Verhalten.

Zwei Kupferplatten in Wasser mit $^1/_{200}$ Schwefelsäure getaucht, und mit den Drähten eines Multiplicators verbunden, bewirkten eine Ablenkung der Magnetnadel, und es zeigte sich immer die zuerst oder die zuletzt eingetauchte positiv-electrisch, je nachdem die eine oder die andere weniger oxydirt war. Blieben beide etwa $^1/_2$ St. in der Flüssigkeit, und wurde dann eine heraus genommen, abgetrocknet und darauf wieder eingesenkt, nachdem sie mit einer anderen zu einem Elemente verbunden war, so erschien aus der Ablenkungsrichtung der Nadel immer erstere negativ-electrisch. Blieb diese hierauf in der Flüssigkeit, und wurde die andere abgetrocknet, so trat gleich der entgegengesetzte electrische Zustand ein. Statt die eine Platte abzutrocknen, kann man sie auch nur ein wenig aus der Flüssigkeit herausheben, um ungleiche Einsenkungsflächen zu erhalten. Wird

sie hierauf wieder in die alte Tiefe eingetaucht, so erscheint sie schon mehr negativ-electrisch als vorhin.

Diese Versuche gelingen bei Kupfer und Messing auch mit anderen Flüssigkeiten als mit Schwefelsäure, und zwar mit einer starken Kochsalzlösung (mit $^1/_{10}$ Salz), mit verdünnter Salpetersäure, nicht aber mit einer schwachen Kochsalzlösung. Man kann endlich diese Versuche noch auf eine andere Weise abändern, und statt eine Platte einige Zeit hindurch der Luft, wenigstens zum Theile, auszusetzen, beide gleiche Zeit hindurch in zwei verschiedenen Flüssigkeiten lassen, sie hierauf herausnehmen, und in einer dritten Flüssigkeit zu einem Elemente verbinden. Da erscheint immer die in der minder leitenden Flüssigkeit gewesene Platte negativ-electrisch, und zwar wird der electrische Strom desto intensiver, je gröſser der Unterschied im Leitvermögen der betreffenden Flüssigkeiten ist. Dieses zeigten Versuche mit Zinn, Zink und anderen Electromotoren, besonders aber mit solchen, die ein wenig oxydirt sind. Dieser Umstand führt auf die Vermuthung, die genannten Phänomene rühren überhaupt von einem, wenn auch nur geringem, Unterschiede im Oxydationszustande der gebrauchten Platten ganz oder zum Theile her, um so mehr, da *Marianini* die Erfahrung gemacht hatte, daſs zwei Zinkplatten, an deren einer ein kleines Stück polirt war, eine viel gröſsere Ablenkung der Magnetnadel bewirkten, als sie ohne diese Vorbereitung thaten. Allein wenn dieser Verdacht gegründet ist, so muſs die Wirkung der Heterogeneität deutlicher hervortreten, wenn man, statt einen Theil mehr als den anderen zu poliren, ein Stück von einem anderen Metall daran löthet. Wie dieses die Erfahrung bestätiget, zeigt folgender Versuch: Werden zwei rechtwinkelige, 2 Centim. breite, 9 C. lange, mit einem Zinkstück von 7 Q. Mill.

Oberfläche versehene Kupferplatten an der Seite, wo sich das Zink befindet, 4 Centim. tief in Wasser getaucht, und die hervorragenden Theile mit den Multiplicatordrähten verbunden, so tritt keine Ablenkung der Magnetnadel ein. Wird aber eine der Platten aus der Flüssigkeit gehoben, abgewischt und hierauf wieder eingetaucht, oder gar nur etwas heraus gehoben, jedoch so, daſs das Zink in der Flüssigkeit bleibt, so ergibt sich eine Ablenkung von 10°. Verfährt man eben so mit der anderen Platte, so erhält man eine eben so groſse aber entgegengesetzte Ablenkung. Das Zink kann diese Ablenkungen nicht hervorgebracht haben, weil man bei so kleinen Stücken in reinem oder nur wenig gesalzenem Wasser keine so groſse Wirkung erwarten darf. Bringt man an einer Bleiplatte auf ähnliche Weise ein Zinkstück an, so erhält man bei einem gleichen Verfahren eine noch gröſsere Ablenkung; minder groſs wird sie aber, wenn man das Kupferstück statt mit Zink, mit Blei. Zinn oder Eisen bewaffnet. Man kann demnach als allgemeines Gesetz aufstellen, daſs alle Metalle, deren Oberfläche man in electrischer Beziehung dadurch heterogen macht, daſs man ein Stück eines anderen, in der Spannungsreihe demselben nachstehenden, daran befestiget, die besprochenen Phänomene hervorbringen. Man braucht aber zur Erzeugung der genannten Erscheinungen nicht gerade solche Metalle anzuwenden, die durch Kunst heterogen gemacht worden sind, sondern man bewirket dasselbe auch mit Metallen, die von Natur heterogen sind.

Der Grund dieses ganzen Verhaltens liegt nach *Marianini* darin: 1) Daſs der electrische Strom, den ein Plattenpaar liefert, wobei der negativ-electrische Theil die gröſsere Oberfläche hat, stärker ist, als derjenige, den ein Plattenpaar gibt, wobei das entgegen-

gesetzte Verhältniſs Statt findet. 2) Daſs ein electrischer Strom die electromotorische Kraft eines Metalles steigert oder herabsetzt, je nachdem er von dem Metalle in die Flüssigkeit übergeht oder umgekehrt. Wird nämlich ein Metallplättchen in eine Flüssigkeit so weit gesenkt, daſs der eingetauchte Theil an electromotorischer Kraft dem Reste nachsteht, so tritt alsogleich ein Strom ein, der von der positiven Oberfläche durch die Flüssigkeit zur negativen übergeht, und dadurch die relative electromotorische Kraft zu vermindern sucht. Taucht man nun in dieselbe Flüssigkeit ein dem ersteren vollkommen gleiches Plättchen ein, so hat dieses eine grössere electromotorische Kraft, und erscheint gegen das erstere negativ-electrisch. Der Verfasser erklärt hieraus auch, warum selbst die zum Theil aus der Flüssigkeit gehobene, nicht abgewischte und dann wieder eingesenkte Platte negativ-electrisch erscheint, obgleich dieses auch im geringeren Grade Statt hat, als wenn man die herausgehobene Platte abwischt. Die dünne Flüssigkeitsschichte, die an der Platte hängen bleibt, leitet nämlich nur schwer und langsam die Electricität von der positiven Seite auf die negative, und letztere erlangt fast die ganze verlorne electromotorische Kraft wieder.

Eine natürliche Folge des Gesagten ist auch, daſs von zwei ungleich tief in eine Flüssigkeit getauchten Platten die tiefer eingetauchte sich electro-negativ zeigen muſs, und dieses bestätiget auch die Erfahrung, welche *Marianini* mit zwei Kupferplatten, an denen kleine Zinkmassen befestiget waren, anstellte. Da die Wirkung der Flüssigkeit auf die electromotorische Kraft nicht augenblicklich Statt hat, sondern mit der Zeit bis zu einer bestimmten Grenze wächst, so muſs durch zwei in hinlänglichem Zeitabstande hinter einander einge-

tauchte Metallplatten von gleicher Beschaffenheit ein electrischer Strom erregt werden können, dessen Intensität desto gröſser ist, je später die eine Platte nach der anderen eingetaucht wurde. Auch dieses bestätiget die Erfahrung.

Bei den vorhergehenden Versuchen wurde an die Kupferplatte Zink, mithin an die negative ein positiver Körper befestiget. Man sollte nun erwarten, daſs wenn man ein electro-positives Metall, z. B. Zink, durch ein kleines Stück eines negativen, z. B. Kupfer, gegen ein anderes heterogen macht, auch ähnliche Phänomene, nur mit entgegengesetztem Strome, Statt finden werden. Allein dieses tritt entweder gar nicht oder nur in einem sehr schwachen Grade ein. Der Grund davon liegt darin, daſs ein electrischer Strom (im Sinne der Unitarier) die electromotorische Kraft beim Übergange von der Flüssigkeit in das Metall leichter ändert, als wenn er die entgegengesetzte Richtung nimmt.

Auch chemische Wirkungen der Flüssigkeit auf das Metall können unabhängig von electrischen Strömen die electromotorische Kraft desselben ändern. Zwei wohl polirte Kupferplatten zeigen in verdünnter Säure keine Spur von dem hier besprochenen Phänomen, wohl aber in Ammoniak, und doch müſste dieses sich in der letzteren Flüssigkeit wegen ihrer schlechteren Leitungsfähigkeit später zeigen, als in der ersteren, wenn es von einer zufälligen Heterogeneität der Plattenflächen herrührte. Zwei reine Zinnplatten gleichzeitig in verdünnte Salpetersäure oder in Ammoniak getaucht, zeigen keine Spur eines electrischen Stromes. Nimmt man aber eine heraus, wäscht sie ab, und senket sie dann wieder ein, so zeigt sich alsogleich ein Strom, aus dem hervorgeht, daſs die unberührt gebliebene Platte electro-negativ ist. Diese Electricität hängt aber nicht etwa

von der Berührung zwischen Zinn und Säure ab, weil sonst beide Platten auf gleiche Weise electrisch werden müſsten, weil dieser Strom desto stärker wird, je länger die Platten in der Flüssigkeit bleiben, ferner weil diese Platten selbst noch dann einen Strom in derselben Richtung erzeugen, wenn man sie aus der ersteren Flüssigkeit heraus nimmt und in eine andere taucht, und endlich weil man gerade entgegengesetzte Ströme erhält, wenn man statt der Salpetersäure concentrirte oder verdünnte Schwefelsäure als leitende Flüssigkeit gebraucht.

Man darf auch nicht glauben, daſs diese Wirkung von einer chemischen Affection der Metalle abhänge; denn wäre dieses, wie könnte denn eine Zinnplatte selbst dann noch gegen eine andere negativ-electrisch seyn, nachdem man sie mit Tuch abgetrocknet hat? Endlich müſste sich ja die durch chemische Wirkung entstandene Electricität ins Unmerkliche verlieren, wenn man das aus der Flüssigkeit hervorragende Stück der Zinnplatte mit einem sehr groſsen Leiter in Verbindung setzt. *Marianini* hat aber die vorhin besprochenen Phänomene selbst dann noch bemerkt, als er das genannte Stück der Zinnplatte mit dem Meere communiciren lieſs. Aus diesen Gründen sieht es *Marianini* als bewiesen an, daſs Flüssigkeiten die electromotorische Kraft der in sie eingetauchten Metalle ändern, daſs diese Änderungen von partiellen Strömen abhängen können, die durch die Heterogeneität der Flächen der gebrauchten Metalle erzeugt werden, daſs aber selbst ohne solche Heterogeneitäten dieselben Änderungen eintreten können.

5. Versuche mit einem Torsions-Multiplicator. Von *Ritchie*.

(Journ. of the royal institution. N. I., *p. 29.)*

Im IX. Artikel war von der Anwendung elastischer Glasfäden auf einen Torsions-Multiplicator von *Ritchie* die Rede, hier sollen die Versuche näher erörtert werden, welche mit diesem Instrumente angestellt wurden, in so weit sie dazu geeignet sind, sowohl die Brauchbarkeit desselben zu zeigen, um die bereits schon bekannten Gesetze der Electricität zu bestätigen, oder Bedenklichkeiten gegen fast allgemein gemachte Behauptungen zu erregen, und dadurch vielleicht auf den rechten Weg zu führen.

Einer dieser Versuche hatte zum Zweck, die Abhängigkeit der Stärke des electrischen Stromes eines Electromotors von der Gröſse des in der Flüssigkeit befindlichen Theiles der Electromotoren zu zeigen. Zu diesem Ende wurden eine rechtwinkelige Kupfer- und Zinkplatte von 1 Z. Breite und 8—9 Z. Länge in einzelne Quadratzoll abgetheilt, in eine Rahme befestiget, um sie stets in einerlei Entfernung zu erhalten, mit dem Multiplicator leitend verbunden, und dann Zoll für Zoll in die leitende Flüssigkeit getaucht. Die zur Einstellung der Nadel in ihre natürliche Lage nöthigen Torsionen, mithin auch die Kräfte des electrischen Stromes, verhielten sich wie die eingesenkten Flächen. Es wird demnach durch diesen Versuch das schon von *Marianini* aufgestellte Gesetz bestätiget.

Zum Behufe eines anderen Versuches wurde ein 2 Zoll breiter und nahe 4 Zoll langer Kupferstreifen so zusammengebogen, wie er bei *Wollaston's* Trogapparat gebraucht wird, an der inneren Seite mit Kitt überzogen, dann mit einem Zinkstreifen von der Gröſse des

zusammengebogenen Stückes verbunden, so daſs jeder Zinkfläche eine Kupferfläche gegenüber stand. Als dieser Apparat mit dem Multiplicator in Verbindung gesetzt und in eine schwache Säure getaucht war, brauchte man, um die ablenkende Kraft aufzuheben, 1000 Windungen des Glasfadens. Wurde aber derselbe Versuch wiederholt, nachdem man eine Zink- und eine Kupferfläche mit Kitt isolirt hatte, so betrug die zu demselben Zwecke nöthige Windung nur 500°. Dieser Versuch bestätiget wohl das bereits allgemein angenommene Gesetz der Zunahme des electrischen Stromes mit der Fläche des negativen Electromotors, steht aber mit einem Versuche *Marianini's* im Widerspruche, bei welchem selbst ein Isoliren der einander zugekehrten Metallflächen des Electromotors keine Verminderung des Stromes zur Folge hatte. Es müssen demnach weitere Versuche diese Sache erst in ein reines Licht setzen.

Ein fernerer Versuch hatte zur Absicht, den Einfluſs der Dicke des flüssigen Leiters auf den electrischen Strom zu bestimmen. Es wurde in einem hölzernen Troge eine 2 Quadratzoll haltende Zink- und eine eben so groſse Kupferplatte so angebracht, daſs man dieselben in verschiedene genau bestimmbare Entfernungen von einander stellen konnte, der Zwischenraum mit einer leitenden Flüssigkeit gefüllt, die Platten mit dem Multiplicator verbunden, und die ablenkende Kraft bei verschiedenem Abstande der Platten von einander gemessen. Es zeigte sich für die Abstände 1, 4, 9 die ablenkende Kraft gleich 3, 2, 1, mithin das Gesetz, daſs sich die Wirkungen des electrischen Stromes verkehrt wie die Quadratwurzeln der Dicke des flüssigen Leiters verhalten. Dieses Gesetz stimmt mit dem von *Cumming* aufgestellten überein, widerspricht aber *Fechner's* Behauptung, welcher, wie es scheint, doch

sorgfältige Versuche zum Grunde liegen. dafs die Stärke des Stromes mit der Dicke des flüssigen Leiters im *einfachen* verkehrten Verhältnisse stehe. Nach *Ritchie's* Gesetz wäre demnach der Vortheil des näheren Aneinanderrückens der Platten eines Electromotors nicht gar grofs, und könnte sogar durch anderweitige Nachtheile überwogen werden, womit doch auch wieder die Erfahrung nicht übereinstimmen will.

Endlich handelte es sich noch um die Bestimmung des Gesetzes der Leitfähigkeit von Drähten bei verschiedener Länge und Dicke derselben. Da fand *Ritchie* wieder Gesetze, die von den bis jetzt als richtig anerkannten abweichen. Es ergab sich ihm nämlich das Resultat, dafs die Leitungsfähigkeit in einem gröfseren Verhältnisse zunimmt als die Dicke der Drähte, und dafs sie im verkehrten Verhältnisse mit der Quadratwurzel ihrer Länge wächst, während andere Versuche gelehrt haben, dafs die Leitfähigkeit im geraden Verhältnisse der Dicke und im verkehrten der Länge der leitenden Drähte stehe.

D. Mitchell's Methode, Cautschouc zu bearbeiten.

Der Physiker und Chemiker braucht sehr oft theils zum Verbinden theils zum Auffangen oder Aufbewahren der Gase Blasen von Schweinen oder Rindern. Die Schwierigkeit, sie in hinreichender Gröfse zu erhalten, und sie so zu reinigen, dafs sie sich, ohne einen üblen Geruch anzunehmen und ihre Haltbarkeit zu verlieren, längere Zeit aufbewahren lassen, die Steifheit und Sprödigkeit, welche sie beim Austrocknen bekommen, und endlich die Leichtigkeit, mit welcher sie von Gasen angegriffen werden, mufsten natürlich schon lange den

Wunsch nach einem von jenen Mängeln freien Surrogate erregen. Es kann einem zwar nicht entgehen, daſs Cautschouc zu einem solchen Stellvertreter wie geschaffen sey, wenn man es nur in dünnen Blasen oder Häutchen zu bearbeiten im Stande ist. Diese Bearbeitung lehrt *Mitchell* im 14. Hefte des *Quarterly Journal.* Man weiſs zwar seit Langem, daſs sich eine Cautschoucblase durch anhaltendes Kochen in Wasser so erweicht, daſs man sie nach der Hand leicht bis zu einer ziemlichen Gröſse aufblasen kann, allein man erhält sie durch dieses Mittel doch nur schwer von solcher Dünne, daſs die Wände nicht bei etwas geringer Temperatur steif werden. Nach *Mitchell* läſst sich aber eine solche Blase ins Unglaubliche ausdehnen, wenn man sie in mäſsig starkem Schwefeläther 10 — 24 Stunden bei der gewöhnlichen Temperatur liegen läſst, dann aufbläst und trocknet. Man hat es sogar in seiner Macht, derlei Blasen von gleichförmiger oder ungleichförmiger Dicke zu erhalten, ihnen ihre Contractibilität zu belassen oder sie ihnen gröſstentheils zu benehmen. Bläst man nämlich rasch hinein, und treibt sie schnell aus einander, so erfolgt die Dehnung ungleichförmig; thut man das Gegentheil, und macht noch dazu mehrere Pausen, so erfolgt die Ausdehnung gleichförmig. Soll die Blase ihre Contractibilität behalten, so läſst man die eingeblasene Luft nach einer Stunde wieder heraus, soll sie sich aber nicht mehr auf ein kleines Volumen zusammenziehen, so läſst man sie im aufgeblasenen Zustande trocknen. Auf solche Weise werden Blasen so dünn, daſs sie durchsichtig erscheinen, und mit Wasserstoffgas gefüllt in die Höhe steigen. *Mitchell* behauptet, eine Blase (von nicht angegebener ursprünglicher Gröſse) auf 5 F. Durchmesser gebracht zu haben. Eine durch Äther erweichte Blase läſst sich leicht über eine beliebige Form

treiben, und nimmt dieselbe dann bleibend an; selbst Stücke von gewöhnlichen verkäuflichen Blasen lassen sich in diesem Zustande dehnen, zu Schnüren ausziehen oder zu feinen Häutchen strecken.

Verfasser dieses hat *Mitchell's* Methode vollkommen zweckmäſsig befunden, und kann sie aus eigener Erfahrung Jedermann empfehlen; nur warnt er vor jenen Blasen, die von auſsen eingedrückte Zeichnungen enthalten, weil sie an den bezeichneten Stellen nach dem Erweichen beim Dehnen Risse bekommen.

Verbesserung.

Seite 81, Zeile 5, soll es statt *Selensäure* heiſsen: *Schwefelsäure*.

Meteorologische Beobachtungen. December 1830.

Der Beobachtungsort liegt 101.7 W. F. über dem mittlern Spiegel der Donau.

Tag.	Um 8 Uhr früh.			Um 3 Uhr Nachmittag.			Um 10 Uhr Abends.			Witterung.
	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	Barometer o° R.	Thermometer.	Wind.	
	Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z.	Grad R.		Paris. Z,	Grad R.		
1	27.597	1.0	OSO. mitt.	27.598	3.0	SO. mittelm.	27.625	1.0	SO. schwach.	Trüb, Nebel, Regen.
2	27 604	1.0	SO. schwach.	27 563	2 0	SO. schwach	27.547	0.5	SO. schwach.	Trüb.
3	27.475	1.2	OSO. mitt.	27.431	1.2	SO. stark.	27 425	0.4	SO. mittelm.	Trüb.
4	27.398	1.0	SO. mittelm.	27.388	1.0	SO. schwach.	27.392	0.3	SO. mittelm.	Trüb.
5	27.402	1.0	O. still.	27.384	2 0	OSO. schw.	27.396	1.0	SO. schwach.	Trüb, Schnee.
6	27.261	2.0	SO. schwach.	27.184	4.0	SO. schwach.	27.160	1.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
7	27.115	3.4	SO. schwach.	27.105	4.2	SSO. schw.	27.111	3.0	SO. schwach.	Trüb.
8	27.103	5.0	SSO. still	27.139	5.0	SSO. schw.	27 182	1.8	SSO. schw.	Sonne mit Wolken.
9	27.189	1.2	WSW. still.	27.061	3.0	SO. schwach.	26 944	1.0	SO. still.	Sonne mit Wolken.
10	26.847	8.0	SSO. stark.	26.895	9.0	SSO. schw.	26.948	5.5	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
11	27.170	5.0	W. schwach.	27.201	8 5	SO. schwach.	27.314	4.0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
12	27.259	3 0	S. still.	27.145	5.2	SO. schwach	27.168	3.5	OSO. schw.	Trüb.
13	27.279	3 0	WNW. stark.	27.416	3.0	WNW. mitt.	27.568	1.0	NW. mittelm.	Sonne mit Wolken.
14	27.722	1.0	NW. schw.	27.736	1.0	NW. mittelm.	27.776	0.0	NW. mittelm.	Trüb.
15	27.770	— 1.0	NW. stark.	27.759	1.0	NW. stark.	27.758	— 0.5	NW. mittelm	Trüb, Schnee.
16	27.687	— 1.0	WSW. mitt.	27.704	0.0	WNW. schw.	27.668	1.0	W. schwach.	Trüb, Regen.
17	27.505	1.0	W. still.	27.514	2.0	SO. schwach.	27.365	1.0	SO. schwach.	Trüb.
18	27.337	0.0	WNW. schw.	27.352	0.0	WNW. stark	27.408	— 1.0	WNW. mitt.	Trüb.
19	27.428	— 1.0	WSW. stark.	27.577	0.0	WNW. schw.	27.488	— 1.0	NW. schw.	Trüb.
20	27.180	— 1.0	NW. schw.	26.980	1.0	SO. schwach.	26.941	1.0	SO. schwach.	Sonne mit Wolken.
21	27 098	1.0	WNW. schw.	27.102	2.5	W. schwach.	27.251	1.5	WNW. schw.	Sonne mit Wolken.
22	27 431	1 0	W. schwach.	27.364	3.3	WNW. schw.	27.313	— 1.0	NW. schw.	Sonne mit Wolken.
23	27.179	— 2.0	W. schwach.	27.034	4.0	SSO. schw.	27 072	— 1.8	SO. still.	Trüb, Schnee.
24	27.185	— 1.8	SO. schwach.	27.034	1.0	SO. mittelm.	26.816	2.0	SO. mittelm.	S. m. W., NachtsSchnee
25	26.785	6.0	SSO. mitt.	26.764	8.0	SSO. mitt.	26 823	2.5	W. mittelm.	Schnee, trüb.
26	26.856	— 4.8	W. stark.	27.177	— 2.5	W. mittelm.	27.222	— 3 0	W. schwach.	Sonne mit Wolken.
27	27.132	— 4.0	W. schwach.	27 146	— 1.8	S. still	27.249	— 5 0	O. schwach.	Nebel.
28	27.252	— 2.0	S. still.	27.167	— 1.0	NW. schw.	27.176	— 3.0	WSW. schw.	Sonne mit Wolken.
29	27 350	4.0	W. stark.	27.571	5.2	W. schwach.	27 636	0.5	W. schwach.	Trüb, Regen.
30	27.575	1.0	S. schwach.	27.518	1.2	SSO. schw.	27.478	0.5	W. schwach.	Trüb, Regen.
31	27.439	1.2	WNW. schw.	27.459	2.0	N. schwach.	27.378	1.0	NNW. schw.	
Mittel	27.310	1.13		27.305	2.76		27.338	0.67		

Fig. 15.

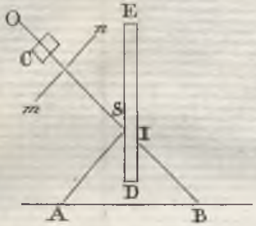


Fig. 14.

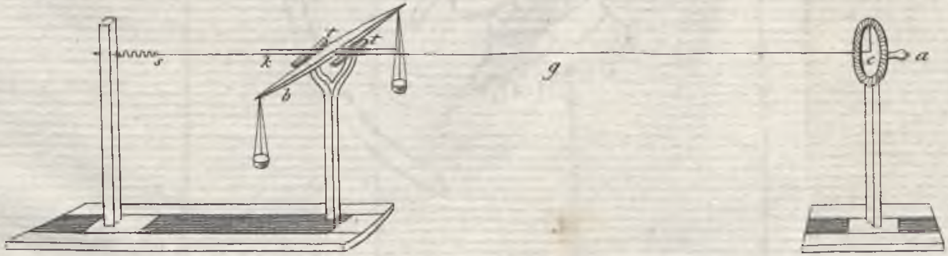


Fig. 16.

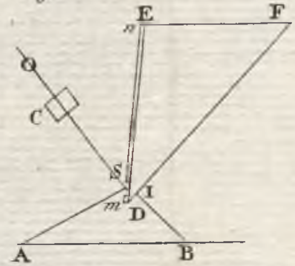


Fig. 3.

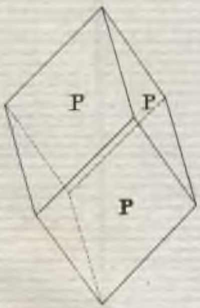


Fig. 4.



Fig. 5.



Fig. 7.

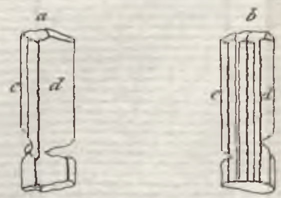


Fig. 8.



Fig. 9.



Fig. 12.

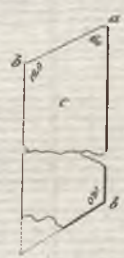


Fig. 6.



Fig. 17.

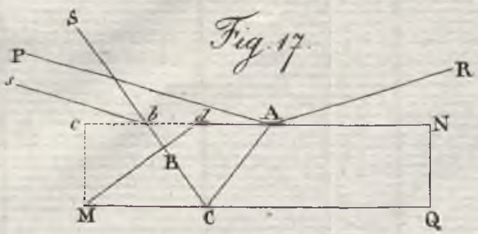


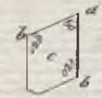
Fig. 10.



Fig. 11.



Fig. 13.



M. B sc.